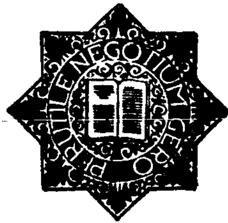
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 2.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

waaruit volgt

$$[\mathbf{O}(AE, ZE), \mathbf{O}(\Pi E, PE)] = [\mathbf{O}(A\Lambda, Z\Lambda), \mathbf{O}(\Xi\Lambda, O\Lambda)$$

De reden in het eerste lid is samengesteld uit

$$[\mathbf{O}(AE, ZE), \mathbf{T}(\Gamma E)] \quad \text{en} \quad [\mathbf{T}(\Gamma E), \mathbf{O}(\Pi E, PE)$$

dus uit

$$[\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)] \quad \text{en} \quad [\mathbf{T}(\Gamma\Delta), \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)]$$

en is dus gelijk aan

$$[\mathbf{T}(N), \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)] \text{ dus aan } [\mathbf{T}(\Theta K), \mathbf{O}(AK, BK)]$$

Dus is

$$[\mathbf{O}(A\Lambda, Z\Lambda), \mathbf{O}(\Xi\Lambda, O\Lambda)] = [\mathbf{T}(\Theta K), \mathbf{O}(AK, BK)]$$

Ook is

$$[\mathbf{O}(\Xi\Lambda, O\Lambda), \mathbf{T}(\Gamma\Lambda)] = [\mathbf{O}(AK, BK), \mathbf{T}(\Gamma K)]$$

dus ex aequali

$$[\mathbf{O}(A\Lambda, Z\Lambda), \mathbf{T}(\Gamma\Lambda)] = [\mathbf{T}(\Theta K), \mathbf{T}(\Gamma K)]$$

of

$$\mathbf{T}(M\Lambda), \mathbf{T}(\Gamma\Lambda)] = [\mathbf{T}(\Theta K), T(\Gamma K)]$$

of

$$(M\Lambda, \Gamma\Lambda) = (\Theta K, \Gamma K)$$

waaruit volgt, dat Γ, Θ en M op één rechte liggen.

Het bewijs is bij Archimedes op overbodige wijze ingekleed als reductio ad absurdum, doordat in den aanvang ondersteld wordt, dat Θ niet op het kegelvlak ligt; daar van deze onderstelling nergens gebruik wordt gemaakt, is die inkleeding een zuivere formaliteit.

3,21. De mogelijkheid, AZ zoo te trekken, dat

$$[\mathbf{O}(AE, EZ), \mathbf{T}(\Gamma E)] = [\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$$

zal bewezen zijn, indien aangetoond kan worden, dat er door Δ een lijn mogelijk is, die (fig. 22) ΓA in Y en het verlengde van ΓB in Φ snijdt, zoodat

$$[\mathbf{O}(Y\Delta, \Delta\Phi), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)] = [\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)].$$

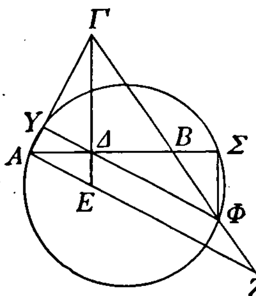


Fig 22.

De gevraagde lijn door A is dan namelijk hieraan parallel. De lijn $Y\Phi$ moet dus zoo getrokken worden, dat

$$\mathbf{O}(Y\Delta, \Delta\Phi) = \mathbf{T}(N) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Bepaalt men nu Σ zoo, dat

$$\mathbf{T}(N) = \mathbf{O}(A\Delta, \Delta\Sigma)$$

dan is voor (3) blijkbaar noodig en voldoende, dat $AY\Sigma\Phi$ een koordenvierhoek is, dus $\angle\, \Delta\Phi\Sigma = \angle\, YA\Delta$.

Men vindt dus Φ op het verlengde van ΓB als top van een driehoek met basis $B\Sigma$ en tophoek, gelijk aan $\angle\, \Gamma AB$.

Voor de uitvoerbaarheid van de constructie van Φ op het verlengde van ΓB is dus noodig en voldoende, dat Σ op het verlengde van AB ligt, dus dat $\Delta\Sigma > \Delta B$ of $N > A\Delta$. Aan die voorwaarde is voldaan, omdat $A\Delta$ de helft is van den kleinsten, N die van den grootsten diameter.

3,22. Daar Archimedes zich uitdrukkelijk op de ongelijkheid (2) van 3,2 beroept, is het niet waarschijnlijk, dat de boven aangegeven constructie, waarbij deze ongelijkheid geen rol speelt, door hem zou zijn toegepast. Aannemelijk is veeleer, dat hij, zonder de vraag naar de constructie van AZ aan de orde te stellen, heeft opgemerkt, dat (fig. 21) voor elke rechte AZ, die door een punt E op het verlengde van $\Gamma\Delta$ gaat, de betrekking (2) voldaan is en dat hij nu tot de mogelijkheid van (1) heeft besloten op grond van de ongelijkheid

$$[\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)] > [\mathbf{O}(A\Delta, B\Delta), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$$

die op $\mathbf{T}(N) > \mathbf{O}(A\Delta, B\Delta)$ of op $N > A\Delta$ neerkomt.

Formeel zou deze conclusie natuurlijk niet in orde zijn, omdat men uit het feit, dat een veranderlijke x (i.c. $[\mathbf{O}(AE, EZ), \mathbf{T}(\Gamma E)]$) grooter is dan een constante a (i. c. $[\mathbf{O}(A\Delta, B\Delta), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$) niet kan afleiden, dat zij gelijk kan worden aan een andere constante b (i.c. $[\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$), die eveneens grooter is dan a. Materieel is ze in het onderhavige geval echter juist, wanneer men continuiteitsbeschouwingen toelaat. Immers draait AZ om A vanuit den stand AB tot den stand parallel aan ΓB, dan groeit de reden $[\mathbf{O}(AE, EZ), \mathbf{T}(\Gamma E)]$ van de waarde $[\mathbf{O}(A\Delta, B\Delta), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$ tot boven iedere van te voren aangegeven grens en dan moet ze ook eenmaal de waarde $[\mathbf{T}(N), \mathbf{T}(\Gamma\Delta)]$ aannemen. Het lijkt op grond van het veelvuldig gebruik, dat Archimedes in zijn neusisconstructies (III; 9) van continuiteitsbeschouwingen maakt, waarschijnlijk, dat hij hier op deze wijze te werk is gegaan.

3,3. In **C.S.** 8 wordt dezelfde vraag behandeld als in **C.S.** 7, maar nu voor het geval, dat $\Delta\Gamma$ gelegen is een vlak door een der diameters

der snede loodrecht op haar vlak, zonder zelf loodrecht op dit vlak te staan.

Zij (fig. 23) AB de bedoelde diameter, N de helft van den anderen diameter [1]). Maak $\Gamma E = \Gamma B$ en laat de rechte door Δ parallel aan EB het verlengde van ΓA in Z, ΓB in H snijden. Nu is **T** (N) òf gelijk òf ongelijk aan **O** ($Z\Delta$, ΔH).

Beschrijf in het eerste geval in een vlak door EB loodrecht op

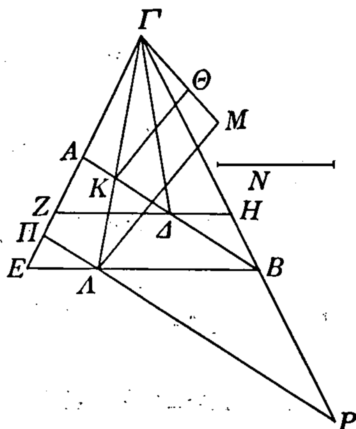


Fig 23.

het vlak van teekening een cirkel met diameter EB, in het tweede geval een oxytome, waarvan EB de eene diameter is, terwijl het vierkant van de andere, Σ, wordt bepaald door

$$[\mathbf{T}(N), \mathbf{O}(Z\Delta, \Delta H)] = [\mathbf{T}(\Sigma), \mathbf{T}(EB)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nu zal de loodlijn, door het midden van EB op het vlak van deze snede opgericht, door Γ gaan. Volgens **C.S.** 7 (3,2) kan dan Γ top zijn van een scheeven cirkelkegel, waarop deze snede ligt [2]), terwijl voor het geval, dat er een cirkel met diameter EB is beschreven, Γ top is van een rechten cirkelkegel, die dezen cirkel tot

[1]) Deze andere diameter wordt διάμετρος συζυγής genoemd, *toegevoegde diameter.* Dit woord heeft hier echter nog niet de bijzondere beteekenis, die het bij Apollonios in de scheeve toevoeging zal verkrijgen en tot in onzen tijd heeft behouden.

[2]) Voor de toepassing van de constructie van **C.S.** 7 (3, 2) in het vlak van teekening zou BE de kleinste diameter van de geconstrueerde oxytome moeten zijn. Dit is echter slechts het geval, wanneer

$$\mathbf{T}(N) > \mathbf{O}(Z\Delta, \Delta H).$$

Is echter EB de grootste diameter, dan kan men de constructie van **C.S.** 7 uitvoeren in het middelloodvlak van EB.

basiskromme heeft. Te bewijzen is, dat op dien kegel de gegeven oxytome met diameter AB ligt. Zij Θ een punt der snede met ordinaat ΘK ten opzichte van AB, M het punt van de oxytome met diameter EB, waarvan het ordinaatvoetpunt Λ met Γ en K op één rechte ligt, ΠP de rechte door Λ parallel aan AB.

Nu is wegens (4)

$$[\mathrm{T}(M\Lambda), \mathrm{O}(E\Lambda, \Lambda B)] = [\mathrm{T}(N), \mathrm{O}(Z\Delta, \Delta H)].$$

Ook is

$$[\mathrm{O}(E\Lambda, \Lambda B), \mathrm{O}(\Pi\Lambda, \Lambda P)] = [\mathrm{O}(Z\Delta, \Delta H), \mathrm{O}(A\Delta, \Delta B)]$$

dus ex aequali

$$[\mathrm{T}(M\Lambda), \mathrm{O}(\Pi\Lambda, \Lambda P)] = [\mathrm{T}(N), \mathrm{O}(A\Delta, \Delta B)] = [\mathrm{T}(\Theta K), \mathrm{O}(AK, BK)]$$

Ook is

$$[\mathrm{O}(\Pi\Lambda, \Lambda P), \mathrm{T}(\Gamma\Lambda)] = [\mathrm{O}(AK, BK), \mathrm{T}(\Gamma K)]$$

dus ex aequali

$$[\mathrm{T}(M\Lambda), \mathrm{T}(\Gamma\Lambda)] = [\mathrm{T}(\Theta K), \mathrm{T}(\Gamma K)]$$

of

$$(M\Lambda, \Gamma\Lambda) = (\Theta K, \Gamma K)$$

waaruit volgt, dat Γ, Θ en M op één rechte liggen, dus Θ op het oppervlak van den geconstrueerden kegel. Voor het geval, dat op EB als diameter een cirkel is beschreven, wordt het bewijs nog iets eenvoudiger.

3,4. In **C.S.** 9 wordt het probleem van **C.S.** 8 opnieuw gesteld, maar nu voor het geval, dat er een scheeve cirkelcylinder moet worden bepaald met as $\Delta\Gamma$ (fig. 24). $\Delta\Gamma$ ligt dus weer in het vlak, door een der diameters der oxytome (AB) loodrecht op het vlak der snede aangebracht, zonder zelf loodrecht op dat vlak te staan. Nu is de afstand ZH der twee rechten AZ en BH, parallel aan $\Delta\Gamma$ getrokken, òf gelijk òf ongelijk aan den anderen diameter Σ der oxytome.

a) Is $\Sigma = ZH$, beschrijf dan (fig. 24) een cirkel met diameter ZH in het vlak door ZH loodrecht op het vlak van AZ en BH. Dan ligt de oxytome op den rechten cirkelcylinder, die dezen cirkel tot basiskromme heeft en $\Delta\Gamma$ tot as. Is immers Θ een punt van de gegeven oxytome met ordinaat ΘK ten opzichte van AB, dan is

$$[\mathrm{T}(\Theta K), \mathrm{O}(AK, BK)] = [\mathrm{T}(^1/_2\Sigma), \mathrm{O}(A\Delta, B\Delta)] = [\mathrm{T}(Z\Gamma), \mathrm{T}(A\Delta)].$$

Is dan $K\Lambda \parallel \Delta\Gamma$, dan is ook

$$[\mathbf{O}(Z\Lambda, \Lambda H), \mathbf{O}(AK, KB)] = [\mathbf{T}(Z\Gamma), \mathbf{T}(A\Delta)]$$

dus is

$$\mathbf{T}(\Theta K) = \mathbf{O}(Z\Lambda, \Lambda H) = \mathbf{T}(M\Lambda).$$

Dus is ΘM parallel aan $K\Lambda$, dus aan $\Gamma\Delta$, dus ligt Θ op den cylinder.

β) Is $\Sigma > ZH$, dan is (fig. 24) op BH een punt Π te bepalen,

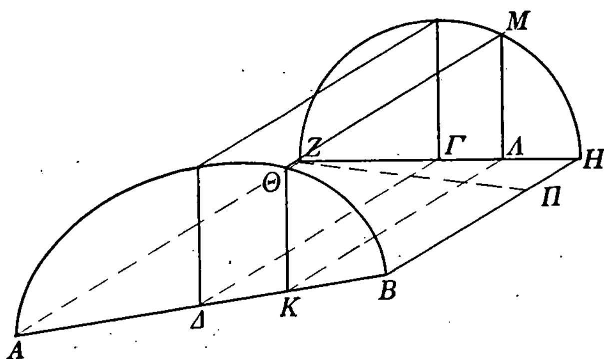


Fig 24.

zoodat $Z\Pi = \Sigma$. Beschrijf nu als boven een cirkel met diameter $Z\Pi$, dan blijkt op dezelfde wijze als bij α), dat de gegeven oxytome ligt op den scheeven cirkelcylinder, die dien cirkel tot basiskromme heeft en $\Gamma\Delta$ tot as.

γ) Is $\Sigma < ZH$, bepaal dan (fig. 25) op het verlengde van $\Delta\Gamma$ een punt Ξ, zoodat

$$\mathbf{T}(\Gamma\Xi) = \mathbf{T}(Z\Gamma) - \mathbf{T}(\tfrac{1}{2}\Sigma)$$

en pas op de loodlijn, door Ξ op het vlak $ABZH$ opgericht, een stuk $\Xi N = \frac{1}{2}\Sigma$ af. In het vlak ZNH wordt nu een cirkel beschreven met diameter ZH; deze cirkel gaat door N. Dan ligt de gegeven oxytome op een scheeven cirkelcylinder, die dezen cirkel tot basiskromme heeft en $\Delta\Gamma$ tot as. Is immers Θ een punt van de oxytome met ordinaat ΘK ten opzichte van AB, $K\Lambda$ parallel aan $\Delta\Gamma$, $M\Lambda$ de cirkelordinaat met voetpunt Λ, O op het verlengde van $K\Lambda$ de projectie van M op het vlak $ABZH$, dan is

$$[\mathbf{O}(Z\Lambda, H\Lambda), \mathbf{O}(AK, BK)] = [\mathbf{T}(Z\Gamma), \mathbf{T}(A\Delta)]$$

of

$$[\mathbf{T}(M\Lambda), \mathbf{O}(AK, BK)] = [\mathbf{T}(\Gamma N), \mathbf{T}(A\Delta)]$$

dus wegens

$$[\mathrm{T}(M\Lambda), \mathrm{T}(N\Gamma)] = [\mathrm{T}(MO), \mathrm{T}(N\Xi)]$$

ook

$$\mathrm{T}[(MO), \mathrm{O}(AK, BK)] = [\mathrm{T}(N\Xi), \mathrm{T}(A\Delta)] = [\mathrm{T}(\Theta K), \mathrm{O}(AK, BK)]$$

dus

$$MO = \Theta K$$

waaruit weer volgt, dat Θ op den cylinder ligt.

Fig 25.

3,5. De bewezen stellingen zijn niet alleen van belang voor den eigenlijken inhoud van het geschrift *Over Conoiden en Sphaeroiden,* maar ook als hulpmiddelen voor de beoordeeling van de Archimedische kegelsnedenleer. Immers, wanneer hij zoo uitvoerig bewijst, dat iedere oxytome op oneindig veel manieren is op te vatten als doorsnede van een scheeven cirkelkegel met een vlak, loodrecht op een hoofddoorsnede, dan is dit blijkbaar een resultaat, dat niet in de *Elementen der Kegelsneden* voorkwam en dat dus een nieuwe bijdrage tot de theorie beduidt. Natuurlijk moet het gemakkelijk zijn geweest, om door omkeering van de redeneering te bewijzen, dat een vlak, loodrecht op de hoofddoorsnede van een scheeven cirkelkegel binnen bepaalde grenzen van ligging een oxytome als snede oplevert, wat een stap in de richting van de Apollonische voortbrenging beduidt. Dat Archimedes hier niet toe overgaat, is, in verband met het hoofddoel van zijn werken (bepalingen van inhouden en oppervlakten) begrijpelijk: de kegelsnedenleer blijft voor hem steeds hulpmiddel, en hij ontwikkelt haar dus niet verder, dan voor zijn onderzoekingen noodig is. Dat hij het echter heel goed geweten heeft, blijkt uit een opmerking in **C.S.** *Definitiones*

(*Opera* I, 258): *Indien een kegel wordt gesneden met een plat vlak, dat alle zijden van den kegel ontmoet, zal de snede òf een cirkel zijn òf een oxytome.* Op dezelfde plaats (I, 260) wordt gezegd, dat deze eigenschap ook geldt voor een (scheeven) cirkelcylinder [1]).

3,6. *Twee oxytomes zijn dan en slechts dan gelijkvormig, wanneer de twee paar diameters een evenredigheid vormen.*

Laat de ordinaten in de twee sneden resp. y en η heeten, de grootste diameters a en α, de kleinste b en β, de abscissen (vanaf een der toppen van den grootsten diameter) x en ξ. Vestig tusschen de abscissen de betrekking

$$(x, \xi) = (a, \alpha). \qquad \text{(verg. 1, 7).}$$

Men leidt nu zonder moeite af, dat dan ook

$$[\mathbf{O}(x, a - x), \mathbf{O}(\xi, \alpha - \xi)] = [\mathbf{T}(x), \mathbf{T}(\xi)]. \qquad (1)$$

Zij nu ondersteld

$$(a, \alpha) = (b, \beta)$$

dan is

$$[\mathbf{T}(b), \mathbf{T}(a)] = [\mathbf{T}(\beta), \mathbf{T}(\alpha)]$$

en op grond van het snedesymptoom (3,0)

$$[\mathbf{T}(y), \mathbf{O}(x, a - x)] = [\mathbf{T}(\eta), \mathbf{O}(\xi, \alpha - \xi)]$$

waaruit in verband met (1) volgt

$$\mathbf{T}(y), \mathbf{T}(\eta)] = [\mathbf{T}(x), \mathbf{T}(\xi)]$$

of

$$(y, \eta) = (x, \xi) = (a, \alpha).$$

Is omgekeerd gegeven $(y, \eta) = (x, \xi)$, dan blijkt door omkeering der redeneering

$$(a, \alpha) = (b, \beta).$$

3,61. Met behulp van 3,6 is uit de in 3,11 vermelde stelling (**C.S.** 6), volgens welke de oppervlakten van twee oxytomes zich verhouden als de rechthoeken, door hare diameters omvat, af te leiden het Corollarium van **C.S.** 6: *de oppervlakten van twee gelijkvormige oxytomes verhouden zich als de vierkanten op de correspondeerende diameters.*

---

[1]) De beide resultaten worden reeds bij Euclides vermeld, *Phaenomena* (*Opera* VIII, 6). Hij heeft waarschijnlijk nog het oog op rechte cirkelkegels en -cylinders. Hij zegt van de oxytome, dat ze gelijkt op een θυρεός, schild.

DE ONTWIKKELING VAN HET BOLOPPERVLAK VOOR PRACTISCH GEBRUIK

DOOR

R. SWIERSTRA.

Wanneer de lichttechnicus voor de vraag gesteld wordt om te bepalen, welk deel van het licht, door een boven een weg opgehangen lichtbron, op het wegdek terecht komt, dan staat hij voor een vraagstuk, dat vooral een geometrisch karakter heeft. Trouwens dit is hem niet geheel vreemd, omdat de bepaling der lichteenheden deels steunt op geometrische begrippen.

Waar deze eenheden wellicht aan meerdere lezers minder bekend zijn en de kennis daarvan voor het volgende van belang is, willen we ze hier even in het kort bespreken.

We onderscheiden de begrippen: lichtsterkte, lichtstroom, verlichtingssterkte met de bijbehoorende eenheden kaars, lumen en lux. Om deze eenheden met elkaar in verband te brengen, gaan we uit van het boloppervlak, waarvan men het middelpunt lichtgevend denkt. Om de ruimte om het middelpunt te kunnen beschouwen moet het begrip van de ruimtehoeken worden ingevoerd. Als eenheid van ruimtehoek kiest men de hoek, die gevormd wordt door het vlak doorloopen door een voerstraal, die een zoodanig oppervlak van het boloppervlak beschrijft, dat dit R^2 is, als R de bolstraal is. Deze ruimtehoek wordt *steradiaal* genoemd (geheele ruimte $= 4\pi$ steradialen).

Onder de *lichtstroom* van een lichtbron verstaat men de hoeveelheid licht, die per seconde wordt uitgestraald. De lichtstroom, die een lichtbron in een of andere richting binnen een zeer kleine ruimtehoek uitzendt, bepaalt de *lichtsterkte* van die lichtbron in die richting. Noemt men I de lichtsterkte, $\Delta\Phi$ de lichtstroom en $\Delta\omega$ het ruimtehoekje, dan is de lichtsterkte van een lichtbron in de richting van het ruimtehoekje bepaald door:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\omega}.$$

Hieruit volgt dat de lichtsterkte de lichtstroom *per* steradiaal is. De eenheid van lichtsterkte heet *kaars,* welke naam afkomstig is uit den tijd toen men de „normaalkaars" als vergelijkingslichtbron gebruikte en daarbij uitging van de lichtsterkte van deze lichtbron in horizontale richting.

We komen nu tot de definieering van de eenheid van lichtstroom.

Denkt men het middelpunt van een bol van 1 m straal lichtgevend met een lichtsterkte in alle richtingen van 1 kaars, en neemt men op het boloppervlak een oppervlak van 1 m^2 aan — overeenkomende met een ruimtehoek van één steradiaal — dan treedt door deze m^2 de eenheid van lichtstroom of één *lumen.* In het geheel is de lichtstroom dus 4π lumen. De grootere eenheid is de *dekalumen,* welke in den laatsten tijd op gloeilampen wordt gestempeld.

Naarmate een grootere lichtstroom op een kleiner vlakte-element valt, wordt dit sterker verlicht. Noemen we de lichtstroom Φ, het oppervlak F, dan is de verlichtingssterkte E bepaald door:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta F}$$

zoodat de *verlichtingssterkte* de lichtstroom per eenheid van oppervlak is. Men heeft de eenheid van verlichtingssterkte, één *lux,* als de lichtstroom 1 lumen per m^2 is, m.a.w. men heeft in alle punten van een vlak een verlichtingssterkte van 1 lux, als een lichtstroom van 1 lumen op 1 m^2 valt en dit gelijkmatig verlicht.

Hieruit volgt dat in alle punten van pasgenoemd boloppervlak 1 lux zal optreden, zoodat een lichtbron met een lichtsterkte van 1 kaars op een vlaktedeeltje op 1 m afstand (en loodrecht door de stralen getroffen) een verlichtingssterkte van 1 lux geeft.

Denkt men de lichtsterkte van een lichtbron I kaars, dan zal op 1 m afstand de verlichtingssterkte I lux zijn, m.a.w. per m^2 vallen I lumen.

Keeren we nu terug tot het aanvankelijk gesteld probleem van: de lichtbron boven de weg.

Om dit op te lossen dient men ten eerste de lichtsterktekromme (fig. 1) d.i. de kromme, die de grootte van de lichtsterkte aangeeft in verschillende richtingen van een vlak, gaande door de as van de lamp, te kennen. Men denkt zich dan de lichtbron, die men puntvormig aanneemt, geplaatst in het middelpunt van een boloppervlak.

Is de lichtbron een *symmetrische straler,* d.w.z. is de lichtsterkte-

kromme eigenlijk de doorsnede van een omwentelingsoppervlak (lichtsterkte oppervlak), en valt de as van de (symmetrische) lichtsterktekromme samen met de verticaal door de lichtbron, dan is de oplossing vrij eenvoudig. Men moet dan nagaan welke lichtstroom op verschillende bandjes van het boloppervlak, gevormd

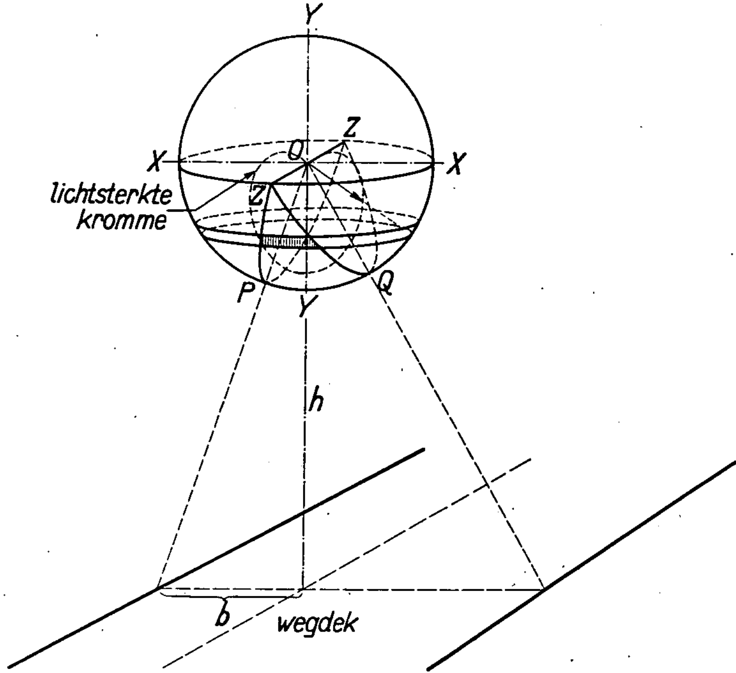


Fig. 1.

door bolschijfjes, valt; deze vindt men volgens het voorgaande door de lichtsterkte (in kaarsen) in de richting van het bandje te vermenigvuldigen met het oppervlak van het bandje (in m^2), aangenomen dat men de bolstraal op 1 m stelt. Door sommeeren van alle lichtstroomen op de bolbandjes komt men dan tot de totale lichtstroom. Wij merken even op, dat hiervoor grafische methoden zijn uitgewerkt, o.a. het z.g. Rouseau-diagram.

Wij wenschten nu te weten hoe groot de lichtstroom is, die op het wegdek valt. Nemen we eenvoudigheidshalve een rechte weg aan. We brengen (fig. 1) door de wegranden platte vlakken aan, die de bol snijden volgens meridiaanvlakken PZZ en QZZ; dan is te bepalen welk deel van de lichtstroom, die er op pasgenoemde bandjes van het oppervlak valt, op het wegdek terecht komt. Al

naar de weglengte naar beide zijde grooter is, moet een grooter deel der door de boltweehoek ingesloten bandstukjes in rekening worden gebracht.

Het vraagstuk wordt lastiger als de lichtbron een *asymmetrische straler* is, d.w.z. als het lichtsterkteoppervlak van deze geen omwentelingslichaam is. Ook dan blijft er niets anders over dan de lichtbron weer geplaatst te denken in het middelpunt van een boloppervlak. Nu neemt men de lichtsterkte van de lamp in zeer vele rich-

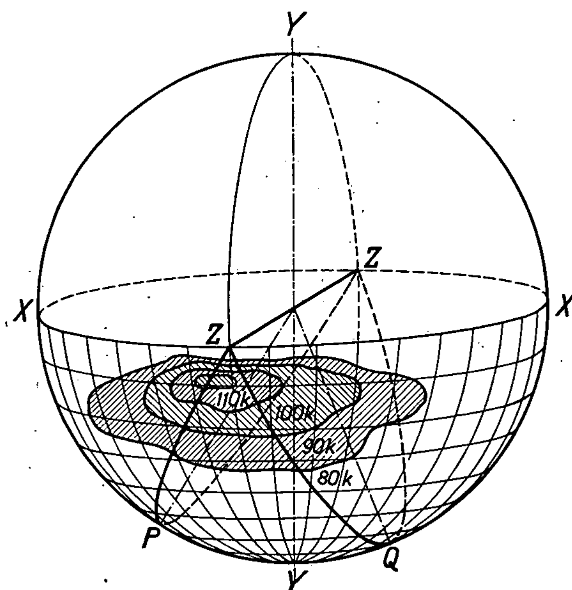


Fig. 2.

tingen op en verbindt op het boloppervlak de uiteinden der voerstralen, in welker richtingen gelijke lichtsterkten gemeten worden door een lijn; zoo ontstaan de z.g. *isokaarslijnen* (fig. 2). Het tusschen twee op elkaar volgende isokaarslijnen begrensde oppervlak is, vermenigvuldigd met de gemiddelde waarde der bij de lijnen geplaatste getallen, bij benadering een maat voor de lichtstroom. Snijdt men de bol door een paar meridiaanvlakken, bedoeld als begrenzing van de wegkanten, (in fig. 2 voorgesteld door PZZ en QZZ) dan is daarmede ook bepaald hoe groot de op het wegdek vallende lichtstroom is.

Maar nu komt bij de practische uitvoering de moeilijkheid: a. men moet een boloppervlak ter beschikking hebben, b. men moet op dit oppervlak de oppervlaktemeting uitvoeren.

Geen wonder, dat men dus op het denkbeeld komt het bolopper-vlak te ontwikkelen of „uit te slaan" in een plat vlak, waartegen men direct het bezwaar kan opperen dat het geen ontwikkelbaar oppervlak is en het dus zeker niet gaat. Hoe troosteloos dit er ook uit ziet, toch valt het nog wel een weinig mee.

Een paar jaar geleden trof ik in het Engelsche tijdschrift „The

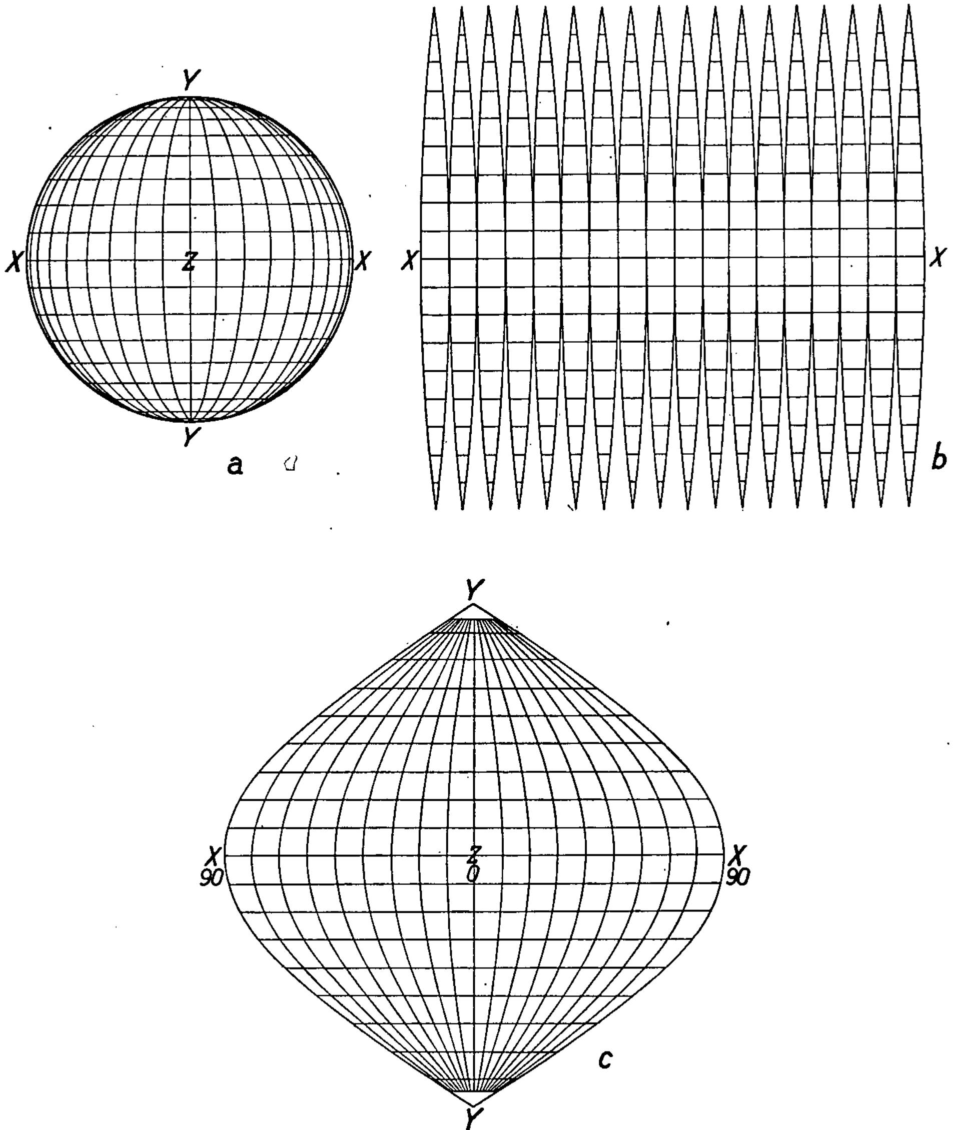


Fig. 3.

Illuminating Engineer" een methode aan, die voor het hier omschreven doel werd gebruikt, en die we hier willen beschouwen.

Men denke daartoe het geheel boloppervlak voorzien van parallelcirkels volgens een aantal meridiaanvlakken in boltweehoeken gesneden (fig. 3) en daarna het halve boloppervlak uitgelegd in een plat vlak. Vervolgens denke men alle einden naar die van de

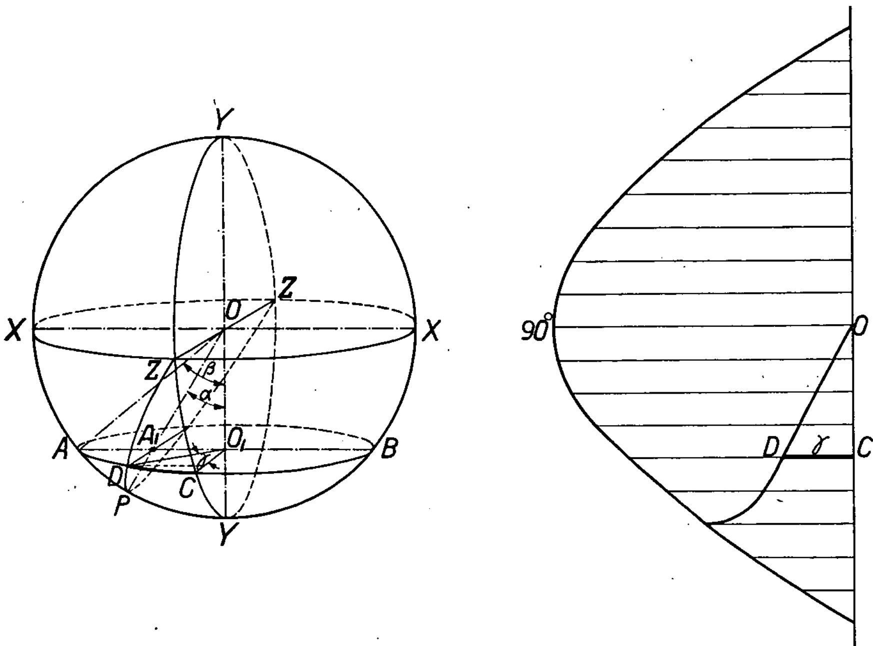


Fig. 4.

middelste verschoven, waarbij de oppervlakken der tusschen twee stukken parallelcirkels begrensde vlakjes gelijk blijven. Het resultaat is een uivormige figuur (de Engelschen spreken van een „onion"-diagram).

Beschouwt men de linker- of rechterhelft, dan ziet men gemakkelijk in dat dit begrensd wordt door een sinuskromme, waarvan de amplitude is ½ πR, terwijl de absis πR is.

Voor het oppervlak van deze sinusfiguur vindt men πR^2. Het geheele uivormige oppervlak is $2\pi R^2$, wat overeen komt met het halve boloppervlak. In grootte stemmen beide overeen. Het ontwikkelde oppervlak is echter niet, zooals we dat bij ontwikkelbare oppervlakken gewoon zijn, „hoekgetrouw". Er treedt een vervor-

ming van het oppervlak op, die langs de x-as nul, nabij het centrum het kleinst en aan de toppen het grootst is. Deze vervorming is voor het gebruik, dat wij er van willen maken, van geen belang, daar het ons om de grootte der oppervlakken gaat.

Voor de bepaling van punten van de isokaarskromme zijn de

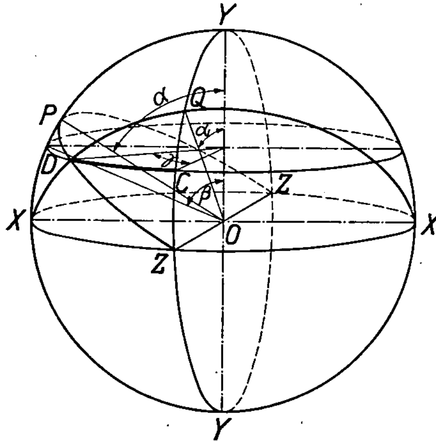


Fig. 5.

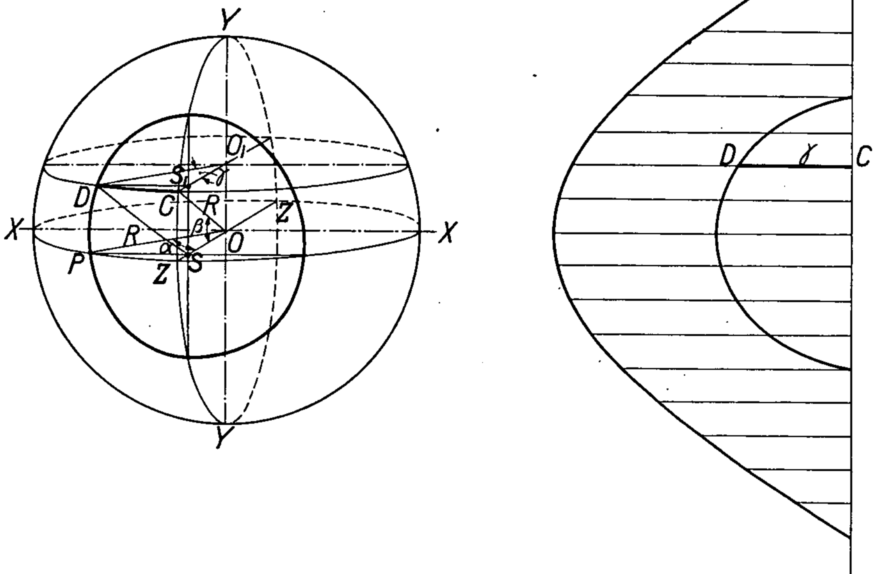


Fig. 6.

parallelcirkels en meridianen, als voorkomen op figuur 3c, wel voldoende en daarmede is ook de bepaling van tusschen twee isokaarskrommen begrensde oppervlakken vrij gemakkelijk geworden.

In bovenbedoeld Engelsch artikel vonden we in het uivormige diagram behalve de parallel- en meridiaancirkels, nog enkele lijnen aangegeven, welke het verloop der meridianen, ontstaande door snijvlakken als PZZ in fig. 1 en 2, weergaven.

Toen wij er nu toe overgingen om de uivormige figuur zelf op te zetten om deze te gebruiken voor enkele verlichtingsgevallen, kwam het ons wenschelijk voor om tenminste het verloop van alle meridiaan- en parallelcirkels te kennen die er bestaan, als men X — X, Y — Y of Z — Z als poolassen aanneemt.

Dit bracht er ons toe de vergelijkingen te bepalen, met behulp waarvan we verschillende punten der meridianen konden vaststellen. Het eerste was betrekkelijk gemakkelijk, het tweede, de bepaling van de punten was een zeer tijdroovend, nauwgezet werk, dat door mijn assistent de Heer J. de Goede, werd ondernomen en met een bizondere volharding en toewijding werd verricht; hij maakte ook de teekening, die het geheele resultaat weergeeft (fig. 7).

In figuur 4 stelt A B een parallelcirkel en PZZ een meridiaanvlak voor, waarvan punt D is te bepalen, en dat gevonden wordt door boog CD, welke gegeven is door:

$$\sin \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cot \beta.$$

Op de overeenkomstige parallelcirkels in het uivormige diagram werd nu de boog CD (γ) afgepast, enz.

Op gelijke wijze werden ook de X — X meridianen bepaald. Daar de meridiaanvlakken, met een zelfde elevatiehoek door twee verschillende assen gaande, elkaar op de 45° meridiaan van de derde as zullen snijden, werden de 45° meridianen ook getrokken (fig. 7). Dit gaf al direct eenige steun bij het teekenen, doch bovendien bleek het hiervoor noodzakelijk dat meerdere snijpunten nog werden vastgelegd, wat nu aan de hand van fig. 5 geschiedde door een plaatsbepaling op de als rechte lijnen geteekende parallelcirkels (fig. 3c) volgens:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Nu waren nog de om de X- en Z-as gedachte parallelcirkels te

bepalen, waartoe weer de snijpunten op de als rechten geteekende parallelcirkels (fig. 6) waren vast te stellen volgens:

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\cos \beta}.$$

En zoo ontstond tenslotte fig. 7.

Zooals we reeds opmerkten was het nauwkeurig teekenen dezer

ONTWIKKELD BOL-OPPERVLAK

MET PARALLEL- EN MERIDIAANCIRKELS

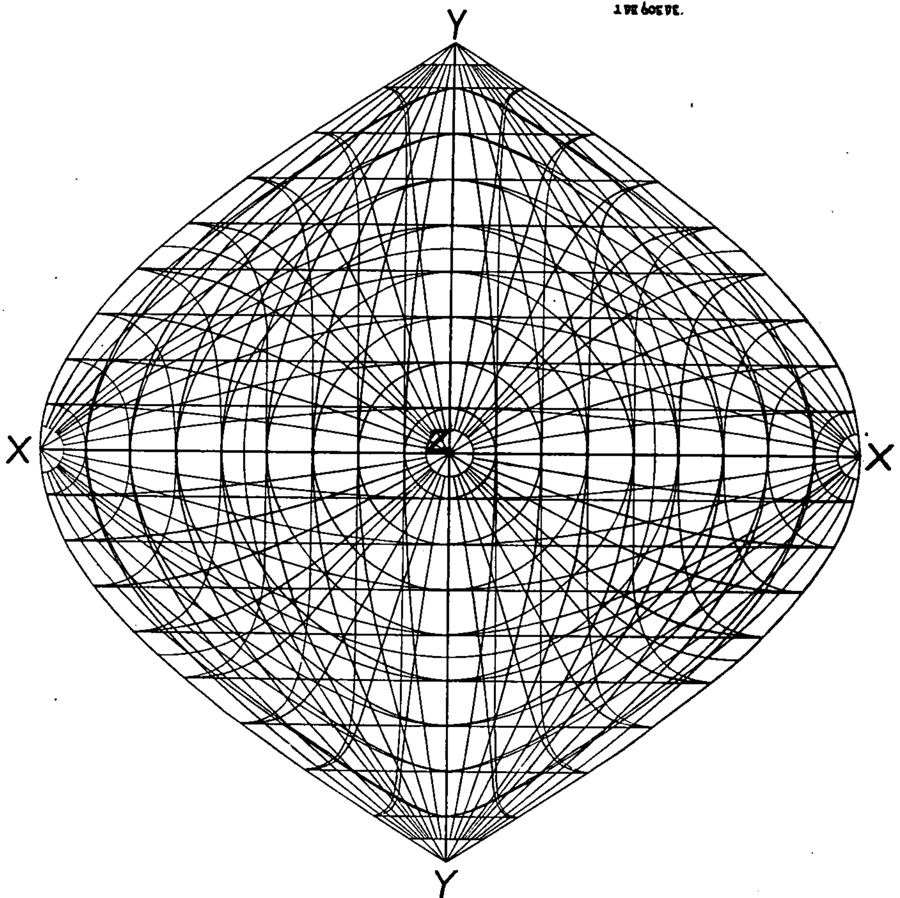


Fig. 7.

lijnen zeer tijdroovend, maar naarmate de figuur groeide gaf deze ons een grootere voldoening en het deed mij een groot genoegen, dat de redactie van dit tijdschrift er prijs op stelde iets over deze figuur op te nemen.

Men ziet gemakkelijk in, dat zij ons in vele gevallen kan helpen, zij het dan ook dat we lang niet altijd alle meridianen of parallelcirkels noodig hebben.

Om haar practische toepassing nog even te demonstreeren geven we in fig. 8 het gebruik daarvan voor de berekening van de verlichting op de straat bij gebruikmaking van de Philips „Rectalux" lamp, een gloeilamp, voorzien van een spiegel, die speciaal voor

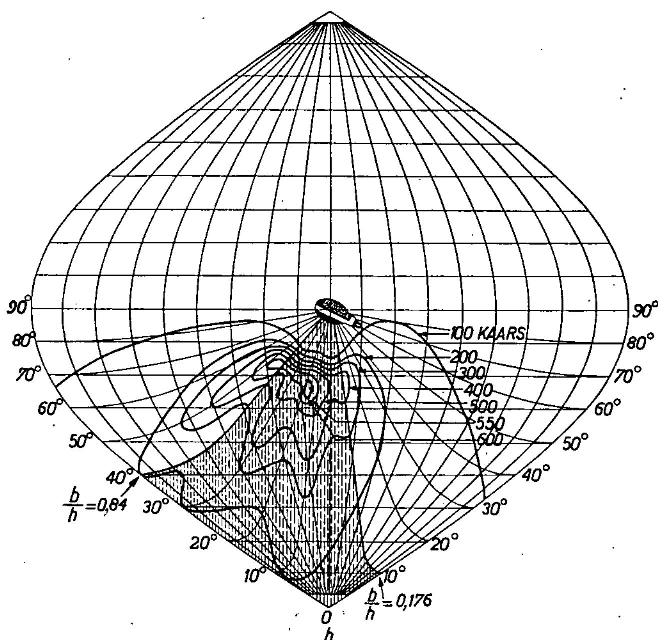


Fig. 8.

straatverlichting is geconstrueerd en waarvan de as een kleine helling met de horizontaal maakt, als de lamp aan de zijkant boven de weg geplaatst wordt.

De in deze figuur geteekende meridianen kunnen nu gebruikt worden om de lichtstroom te bepalen, die in een bepaalde boltweehoek (fig. 1) op het wegdek valt. We hebben daartoe in fig. 8 als voorbeeld het tusschen de 10° en 40° meridianen begrensde stuk gearceerd.

We kunnen ons ook het geval denken, dat ergens in een lokaal een lamp hangt en dat men wenscht te weten welke lichtstroom er door het venster naar buiten wordt gezonden. Dan heeft men door de vensterkozijnen vlakken te denken, die door het bolmiddelpunt

gaan, zoodat we op de bol een begrenzing van een bolvierhoek door 4 meridianen verkrijgen, die, mochten ze niet op het ui-diagram voorkomen, toch gemakkelijk bij benadering zijn te bepalen.

Het spreekt wel van zelf, dat we bij het teekenen van de bolontwikkeling, wel direct hebben gedacht aan het gebruik daarvan in de aardrijkskunde, omdat zij het voordeel heeft dat de oppervlak-

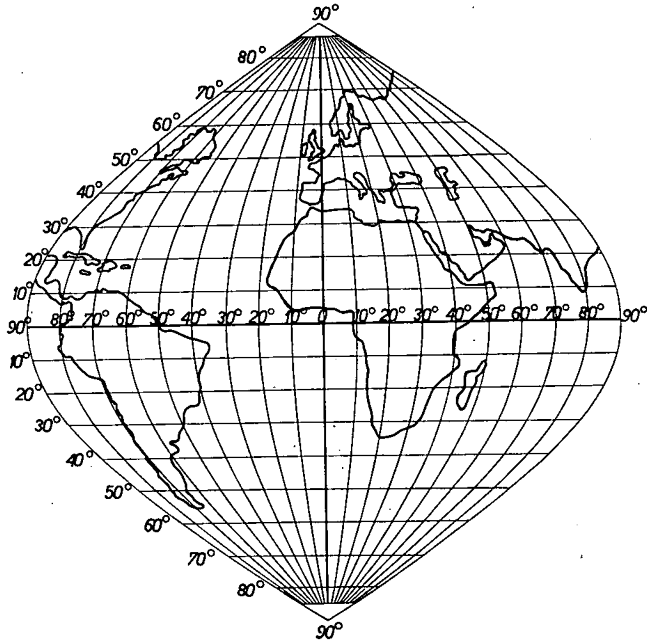


Fig. 9.

ken niet van grootte veranderen (wel van vorm, naarmate ze dichter bij de polen liggen).

Wij vonden hiervan in een paar belangrijke atlassen en aardrijkskundige werken geen voorbeelden, en hebben daarom als voorbeeld figuur 9 uitgewerkt.

Toen we later nog Winkler—Prins raadpleegden, vonden we na eenig zoeken onder kaartprojectie, dat de methode in de aardrijkskunde bekend is en wel onder de naam „Aequivalente projectie" van Sanson—Flamsteed. Wij zijn er ons wel van bewust, dat we met het hier behandelde geen wiskundig probleem hebben opgelost. Wellicht zien de meer deskundige lezers nieuwe vraagstukken, problemen of andere en betere oplossingen; voor ons doel was het bereikte op dit oogenblik voldoende.

DE COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE EN HAAR WERK IN DEN TEGENWOORDIGEN TIJD

DOOR

Dr. D. J. E. SCHREK.

Inleiding. Tot de internationale organisaties, die in ons land zeer weinig bekend zijn, behoort zeker wel in het bijzonder de hierboven vermelde. Ook bij de leeraren in wiskunde is deze onbekendheid grooter dan men zou mogen verwachten, iets waarvoor zeker verschillende oorzaken zijn aan te geven. Is reeds in het algemeen de belangstelling voor het onderwijs in het buitenland in de kringen der leeraren dikwijls gering, hier hebben toch ook andere factoren hun invloed doen gelden. Vooreerst zijn de leeraren zelf weinig in deze samenwerking betrokken geworden; het zoeken van contact ging meestal door tusschenkomst van de regeeringen en wetenschappelijke instellingen en bleef daardoor grootendeels beperkt tot de kringen der hoogleeraren en der inspecteurs van het middelbaar onderwijs. Daarbij komt dat de Commissie haar werk geruimen tijd heeft moeten opschorten en eerst de laatste jaren weer een grootere activiteit heeft ontwikkeld.

Hoe dit ook zij, er is, naar mij voorkomt, alle reden om dit werk eens weer onder de algemeene aandacht te brengen en de verschijning der laatste twee rapporten geeft daartoe een gereede aanleiding. Kortheidshalve zal de Commissie als C. I. E. M. worden aangeduid; in de Duitsch sprekende landen en ook ten onzent staat ze veelal als I. M. U. K. (Internationale Mathematische Unterrichtskommission) bekend.

Algemeene opmerkingen. De geschiedenis der C. I. E. M. tot 1920. De C. I. E. M. heeft haar ontstaan te danken aan het initiatief van

den Amerikaanschen hoogleeraar D. E. Smith[1]) op het Internationaal Wiskundig Congres[2]) te Rome in 1908. Vele jaren is Smith ondervoorzitter (later voorzitter) geweest, tot hij in 1932 wegens zijn gevorderden leeftijd meende te moeten aftreden. Voorzitter werd Felix Klein (1849—1925), hoogleeraar te Göttingen, die door zijn wetenschappelijk werk en door zijn bemoeiïngen op onderwijsgebied van zoo bijzondere beteekenis voor het wiskunde-onderwijs is geweest[3]). In de jaren 1908—1920 is onder zijn leiding, maar met medewerking van vele vooraanstaande geleerden en onderwijsmannen een ontzaglijke hoeveelheid arbeid verricht. Onder die medewerkers neemt een eerste plaats in Dr. W. Lietzmann, die thans wel een der leidende figuren, niet slechts in Duitschland, maar in geheel Europa is geworden[4]).

Het werk, dat door de C. I. E. M. is verricht, komt vooreerst tot uiting in de congressen, die deels ter gelegenheid van de Internationale Wiskundige Congressen (Cambridge 1912) werden gehouden, maar deels ook zelfstandig (Brussel 1910, Milaan 1911, Parijs 1914). Verder werden door de subcommissies, die in de verschillende landen gevormd werden (ten onzent onder voorzitterschap

---

[1]) David Eugene Smith (geb. 1860) was een lange reeks van jaren (van 1901 tot zijn emeritaat) hoogleeraar aan Teachers College (Columbia Universiteit) te New York, waar hij de didactiek en de geschiedenis der wiskunde onderwees. Onder zijn talrijke werken moge hier genoemd worden de fraai geïllustreerde History of Mathematics (Vol. I: General Survey, Vol. II: Special Topics), die bij Ginn & Co. te Boston is verschenen.

[2]) Internationale Wiskundige Congressen worden in den regel om de vier jaren gehouden. Officiëel hadden ze het eerst plaats in 1897 (Zürich), vervolgens in 1900 (Parijs), 1904 (Heidelberg), 1908 (Rome), 1912 (Cambridge), waarna de Wereldoorlog ze voorloopig onmogelijk maakte.

[3]) De beteekenis van Klein met name voor het wiskunde-onderwijs vindt men geschetst door H. E. Timerding in het Klein-Heft van het tijdschrift die Naturwissenschaften (Jaarg. 1919, bl. 303—307) en door H. Fehr in l'Enseignement Mathématique **24** (1924—'25) bl. 287—290.

[4]) Walther Lietzmann (geb. 1880), sedert 1919 directeur der Oberrealschule te Göttingen en de laatste jaren tevens als hoogleeraar aan de Universiteit aldaar verbonden, is schrijver van een groot aantal werken op didactisch gebied. Van meer algemeen belang is zijn verhandeling: „Ueber die Beurteilung der Leistungen in der Schule. Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches" (Leipzig, Teubner 1927). Sedert 1913 is Lietzmann redacteur van de Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen (Leipzig, Teubner).

van nu wijlen Prof. J. Cardinaal) een groot aantal rapporten gepubliceerd, die een overzicht moesten geven van den toenmaligen stand van het wiskunde-onderwijs. Bij de liquidatie der C. I. E. M. in 1920 waren niet minder dan 294 rapporten verschenen, die in bijna 200 grootere en kleinere boekdeelen waren uitgegeven. Veel ervan is thans verouderd, maar sommige rapporten zijn van blijvend belang en van veel wijdere strekking [1]). Niemand die in latere jaren de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs zal willen bestudeeren, zal aan dit materiaal voorbij kunnen gaan. Het is dan ook zoo juist wat de algemeene secretaris in zijn straks nog te noemen eindrapport van 1920 opmerkt: „Il serait désirable que la collection complète des publications figurât dans toutes les grandes Bibliothèques accessibles au corps enseignant." Voor ons land is deze wensch slechts tot op zekere hoogte vervuld [2]).

Onder de leidende figuren van de C. I. E. M. is eindelijk nog te noemen Prof. H. Fehr [1]) te Genève, die van de oprichting in 1908 tot op dit oogenblik algemeen secretaris is geweest. Prof. Fehr is tevens een der redacteuren van het tijdschrift „l'Enseignement Mathématique", dat van den aanvang af tevens het orgaan is geweest van de C. I. E. M. Het was in 1899 door Fehr opgericht samen met Laisant [2]), die ook als lid der Fransche subcommissie een werkzaam aandeel in haar werk heeft gehad. Na den dood van

---

[1]) Als een der zoodanige noem ik b.v. het omvangrijke werk van W. Lorey. Das Studium der Mathematik an den Deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Leipzig, Teubner 1916.

[2]) Een compleet stel der uitgaven bevindt zich in de bibliotheek der Afdeeling Algemeene Wetenschappen van de Technische Hoogeschool te Delft, wat natuurlijk samenhangt met de werkzaamheid van Prof. Cardinaal aldaar als hoogleeraar. Bedoelde bibliotheek maakt geen deel uit van die der Technische Hoogeschool en is bestemd voor hoogleeraren en assistenten. Het is niet onmogelijk voor belangstellenden om hieruit de uitgaven der C.I.E.M. ter leen te krijgen. Een poging van schrijver dezes om een collectie in een der groote bibliotheken geplaatst te krijgen is niet gelukt.

[3]) Henri Fehr (geb. 1870) is sedert 1900 hoogleeraar aan de universiteit te Genève.

[4]) C. A. Laisant (1841—1920), wiskundige en politicus, was een markante figuur. Behalve van l'Enseignement Mathématique was hij ook medeoprichter van de bekende Intermédiaire des Mathématiciens (1894). Bekend is zijn werk „La mathématique. Philosophie, Enseignement" (Paris, Carré & Naud), waarin hij een onafhankelijk standpunt inneemt (reeds blijkend uit den ongewonen enkelvoudsvorm in den titel!). Vgl. de necrologie van de hand van Buhl in l'Enseignement Mathématique **21** (1921) bl. 73—80.

L a i s a n t trad A. B u h l te Toulouse als mede-redacteur op. Het tijdschrift, hoewel aan het wiskunde-onderwijs gewijd, verschilt aanmerkelijk van andere onderwijstijdschriften; de verhandelingen zijn gewoonlijk zuiver wetenschappelijk en betreffen zelden de didactiek. Maar door de uitvoerige berichten omtrent personen, congressen, genootschappen, universiteiten en allerlei andere wetenschappelijke instellingen dient toch het tijdschrift op zijn eigen wijze het wiskunde-onderwijs in den ruimsten zin.

Daar het onderwerp van dit opstel alleen de nieuwere geschiedenis der C. I. E. M. betreft moeten uitvoeriger beschouwingen over het tijdvak 1908—1920 hier achterwege blijven; ze zijn ook overbodig, daar de geschiedenis van dat tijdvak reeds voldoende is beschreven. Zeer uitvoerig vindt men ze in de Publications du Comité Central [1]). Een veel beknopter overzicht, eveneens van de hand van H. F e h r komt voor in l'Enseignement Mathématique van 1921 [2]). Een ander kort overzicht is te vinden in den derden jaargang van Paedagogische Studiën [3]). Ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan der C. I. E. M. gaf L i e t z m a n n enkele mededeelingen over haar oudste geschiedenis [4]).

De eerste jaren na 1920. Hoewel men in het begin van den oorlog nog getracht had het werk zoo goed mogelijk voort te zetten en althans hoopte het spoedig opnieuw te kunnen opvatten bleek al spoedig, dat de samenwerking niet langer mogelijk was. En na den oorlog bleek al spoedig dat men maar niet eenvoudig kon doorgaan waar men tevoren was opgehouden. Daarvoor hadden de gebeurtenissen van die jaren te diep ingegrepen. De secretaris raadpleegde de overige leden van het Comité Central afzonderlijk; men was van oordeel dat de eenige weg was, de C. I. E. M. te ontbinden. Zoo werd dan ook besloten. De landelijke subcommissies zouden, indien

---

[1]) Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Publications du Comité Central. 1re série (1908—1911), 200 bl., prijs 5 francs (Zwitsersch); 2me série (1912—1920), 361 bl., prijs 10 francs (Zwitsersch), Genève, Georg & Cie.

[2]) H. F e h r, La C.I.E.M. de 1908—1920. Compte rendu sommaire. Ens. Math. **21** (1921) bl. 305—342.

[3]) D. J. E. S c h r e k, De „Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique" 1908—1920. Paedagogische Studiën **3** (1922) bl. 109—127.

[4]) W. L i e t z m a n n, 25 Jahre IMUK. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **46** (1933), bl. 101—105.

ze dat wilden, kunnen blijven bestaan en l'Enseignement Mathématique zou haar in dat geval ter beschikking blijven [1]). De secretaris gaf een uitvoerig eindverslag met een complete lijst der publicaties [2]).

Tot de opheffing der C. I. E. M. had niet weinig bijgedragen de omstandigheid, dat men van de zijde der geallieerde staten begonnen was met een nieuwe zoogenaamd internationale samenwerking, waarbij echter Duitschland en zijn bondgenooten waren buitengesloten. Er hadden intergeallieerde conferenties plaats gehad te Londen (Oct. 1918), Parijs (Nov. 1918) en Brussel (Juli 1919) en er was een „Conseil International de recherches" geschapen, gevestigd te Brussel. Deze zou weer verschillende bijzondere organisaties in het leven roepen. Te Straatsburg werd een Internationaal Wiskundig Congres gehouden (22—28 Sept. 1920), waartoe de geallieerde en enkele neutrale staten werden uitgenoodigd. Daar werd ook definitief de „Union Internationale Mathématique" ingesteld, waartoe het vorig jaar te Brussel reeds was besloten en die voortaan de Internationale Wiskundige Congressen zou organiseeren. Geen wonder dat het congres te Straatsburg door Duitschland niet als internationaal kon worden erkend, wat de Deutsche Mathematiker-Vereinigung ook in een resolutie tot uitdrukking bracht.

De eerstvolgende jaren vernemen we nu uit den aard der zaak niets meer van de C. I. E. M., ook niet op het volgende congres te Toronto (Canada) op 11—16 Aug. 1924. Wel had dit congres evenals dat te Straatsburg een afdeeling voor Geschiedenis en Onderwijs der Wiskunde, waar o.a. Fehr sprak. Tijdens het congres had ook de algemeene vergadering der Union plaats, onder voorzitterschap van de la Vallée Poussin, die aftrad en werd opgevolgd door S. Pincherle (Bologna).

De Congressen te Bologna (1928) *en te Zürich* (1932). Belangrijker, in verband met ons onderwerp, was het Internationaal Wiskundig Congres, dat op 3—8 Sept. 1928 te Bologna plaats had.

Vooreerst valt op te merken, dat de uitnoodiging tot deelneming deze maal was gericht tot alle beoefenaren der wiskunde zonder onderscheid. Dat deze uitnoodiging goed was ontvangen, ook door

---

[1]) De Duitsche subcommissie bleef inderdaad bestaan onder voorzitterschap van F. Klein; de Nederlandsche werd opgeheven.

[2]) Ens. Math. **21** (1921), bl. 305—342, reeds hierboven aangehaald

de eertijds uitgeslotenen, blijkt uit het feit, dat onder de deelnemers na Italië Duitschland het sterkst vertegenwoordigd was.

Zeer duidelijk vinden we deze zelfde gezindheid terug in de openingsrede van Pincherle. „Les Congrès internationaux des mathématiciens", zoo zegt hij, „inaugurés à Zurich en 1897 et qui, olympiades de la pensée, se sont succédé depuis 1900 par période de quatre années, ont été interrompus par la guerre. Après la guerre, l'Union Mathématique internationale a voulu en renouveler la série: mais cette Union, influencée par un état d' esprit que la psychologie du lendemain de la guerre suffit à expliquer, sinon à justifier, excluait de la participation aux Congrès des nations dont les contributions aux progrès de la Science ne pouvaient être méconnues. Deux Congrès ont eu lieu avec ces restrictions, l'un à Strasbourg en 1920, l'autre à Toronto en 1924. Mais dans la séance de clôture de ce dernier, une motion des représentants des Etats-Unis d'Amérique, appuyée par les délégués de plusieurs autres nations, y compris l'Italie, exprimait le voeu que l'ère des exclusions fût close" [1]).

Ook in de algemeene vergadering der Union, die tijdens het congres plaats had en waarin het voorzitterschap overging op W. H. Young treft men deze opvatting aan. Eigenaardig is daarbij, dat er blijkbaar een zekere twijfel begon op te komen of de Union nu nog wel noodig was, maar toch: „Tous les membres présents se déclarent favorables au maintien de l'Union."

Wat intusschen het meest verwondering wekt is, dat de C. I. E. M. hier zonder nadere verklaring plotseling weer optreedt: de Afdeeling VI van het congres (Mathématiques élémentaires, Questions didactiques, Logique mathématique) staat mede onder haar leiding. Wat was er intusschen voorgevallen? Alleen zij, die zeer nauw betrokken waren bij de C. I. E. M. zouden hierop het juiste antwoord kunnen geven. „Die Geschichte der I. M. U. K. seit 1916 ist stark beeinflusst durch den Krieg, dessen Nachwirkungen erst sehr spät, auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Bologna 1928 noch nicht ganz, hoffentlich endgültig aber auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Zürich 1932 überwunden wurden. Es ist noch nicht an der Zeit die für die Geschichte der internationalen wissenschaft-

---

[1]) Ens. Math. **28** (1929), bl. 29.

lichen Beziehungen nicht unwichtigen Akten jener Jahre zu veröffentlichen, zumal in ihnen naturgemäss das persönliche Element stark mitschwingt." Aldus Lietzmann in zijn reeds aangehaald artikel „25 Jahre I. M. U. K." Men verneemt hierin in elk geval dat de liquidatie der C. I. E. M. nog hangende was, toen het congres te Bologna nieuwe mogelijkheden bleek te openen.

Het spreekt vanzelf dat de ijverige secretaris Fehr de gelegenheid te baat nam om in deze bijeenkomst nog eens te wijzen op de beteekenis van den vroeger verrichten arbeid, die was neergelegd in zoovele rapporten van groote waarde. Maar men maakte ook weer toekomstplannen. De Afdeeling nam met algemeene stemmen de volgende motie [1]) aan, die later door den voorzitter van het congres werd goedgekeurd:

1. „Le Congrès international des mathématiciens adresse ses remerciements aux gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, et rend hommage à la mémoire des membres décédés.

2. „Il décide de proroger les pouvoirs du Comité central, composé actuellement de MM David-Eugène Smith (New-York), président, Castelnuovo (Rome) et Hadamard (Paris), vice-présidents, H. Fehr (Genève), secrétaire général, et qui devra être complété par l'adjonction d'un cinquième membre, désigné par cooptation.

3. „Il prie le Comité central de compléter la commission de manière que toutes les nations participant au congrès y soient représentées, et de s'assurer la coopération de leurs gouvernements."

Als vijfde lid van het Comité Central werd W. Lietzmann gekozen, een keuze die ons niet behoeft te verwonderen. Verder werd besloten tot twee nieuwe werkzaamheden:

a. het uitgeven van een reeks rapporten over de veranderingen in het wiskunde-onderwijs in de verschillende landen sedert 1910,

b. het weer opvatten van de enquête over de theoretische en practische opleiding der leeraren in wiskunde, een onderzoek, waartoe het Congres te Parijs (1914) reeds had besloten, maar dat nooit volledig had plaats gehad.

Beide ondernemingen komen straks uitvoeriger ter sprake.

---

[1]) Ens. Math. **27** (1928) bl. 326—327 en **28** (1929) bl. 48—49.

Groote belangstelling bestond er ook voor het Internationaal Wiskundig Congres te Zürich (4—12 Sept. 1932), dat in vele opzichten belangrijk was [1]). Niet minder dan 39 landen waren vertegenwoordigd op dit congres, waarvan R. Fueter voorzitter was.

Ook nu weer vergaderde tijdens het congres de Union en deze maal bleken de meeningen zeer verdeeld. Vele aanwezigen, met name de Amerikaansche afgevaardigden, ontkenden het bestaansrecht der Union en beweerden dat ze eigenlijk tot dusver vrijwel niets had verricht. Na lange en vrij heftige debatten werd ten slotte besloten de Union op te heffen, althans voorloopig. Een commissie werd ingesteld onder voorzitterschap van F. Severi om de internationale samenwerking op het gebied der wiskunde opnieuw te bestudeeren. Op het eerstvolgend congres (Oslo 1936) zal deze commissie-Severi dan verslag moeten uitbrengen. Het congres heeft later in een plenaire zitting dit besluit bekrachtigd.

Hoezeer de meeningen tegenover elkaar stonden blijkt wel uit het oordeel achteraf over dit besluit. Prof. Fehr is er verontwaardigd over en acht het schromelijk ondankbaar om de Union op te heffen na eerst van haar weldaden te hebben geprofiteerd. Lietzmann daarentegen meent dat van het omvangrijke program der Union nauwelijks iets tot uitvoering is gekomen. Nog sterker drukt een bekend Nederlandsch wiskundige zich uit, wiens oordeel ik vroeg: „de U. I. M. is een onding, dat gelukkig al op sterven ligt."

Wat de C. I. E. M. betreft [2]), ook nu werden haar zittingen gecombineerd met die van Afdeeling VIII (Onderwijs). Twee zulke zittingen hadden plaats, ze werden behalve door de officieele afgevaardigden ook bijgewoond door tal van andere congressisten, aangetrokken door de persoon van den inleider, Prof. Gino Loria.

Een overzicht van de geschiedenis der C. I. E. M. werd gegeven door haar voorzitter Prof. D. E. Smith. Hij herinnerde aan de te Bologna genomen besluiten en de enquête betreffende de leeraarsopleiding, die intusschen heeft plaats gehad. Prof. Fehr deed als secretaris enkele aanvullende mededeelingen. Een groot

---

[1]) Ens. Math. **31** (1923) bl. 240—259. Een beknopt verslag gaf Lietzmann in Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **63** (1932) bl. 390—400.

[2]) Ens. Math. **31** (1932) bl. 260—267.

aantal (21) landen is thans in de C. I. E. M. vertegenwoordigd [1]). De reeks rapporten over „Les modifications essentielles de l'enseignement mathématique dans les principaux pays depuis 1910" is in de laatste jaren in l'Enseignement Mathématique verschenen. Na de mededeelingen van de HH. Smith en Fehr hield Gino Loria zijn samenvattende voordracht over „La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire."

In het Comité Central kwam eenige verandering doordat Prof. Smith aftrad en zich om redenen van leeftijd en gezondheid niet herkiesbaar stelde. Hij werd, terecht, tot eere-voorzitter gekozen. De samenstelling van het Comité Central werd nu als volgt:

J. Hadamard (Parijs), voorzitter.
P. Heegaard (Oslo),
W. Lietzmann (Göttingen), } onder-voorzitters.
G. Scorza (Napels),
H. Fehr (Genève), algemeen secretaris en penningmeester.

Ten aanzien van zijn bevoegdheden werd besloten:

„Le Comité central pourra constituer des sous-commissions nationales en s'adressant aux Gouvernements ou aux associations mathématiques; il incombera aux sous-commissions nationales de faire des démarches utiles en vue d'obtenir les contributions permettant de couvrir les dépenses du secrétariat-général,"

en ten aanzien van zijn verdere taak:

„La Commission est invitée à élaborer un rapport sur *les tendances actuelles dans le développement de l'enseignement mathématique dans les divers pays.* Les rapports nationaux seront exposés personnellement par leurs auteurs au prochain Congrès; les rapports complets seront remis au secrétaire-général."

Beide besluiten werden later door het Congres in pleno bekrachtigd.

De enquête over den tegenwoordigen toestand van het wiskunde-onderwijs. We bespreken nu nog de beide publicaties, waarvan

---

[1]) Nederland ontbreekt in deze rij. Het Comité Central heeft, naar Prof. Fehr mij in April 1934 meedeelde, stappen gedaan bij de Kon. Academie van Wetenschappen en hijzelf heeft te Genève besprekingen gevoerd met Prof. L. E. J. Brouwer, echter blijkbaar voorloopig zonder resultaat.

reeds eerder sprake was en waarvan de eerste betrekking heeft op de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in verschillende landen gedurende de laatste jaren [1]). Ze is, als vervolg op de vroegere deelen, verschenen als 3e publicatie van het Comité Central. Haar ontstaan dankt ze aan een Amerikaansch initiatief. De „National Council of Teachers of Mathematics", de groote vereeniging in de Vereenigde Staten, waarvan „The Mathematics Teacher" het orgaan is, had besloten haar 4e Jaarboek te wijden aan „significant changes and trends in the teaching of mathematics throughout the world since 1910"; onder redactie van Prof. W. D. Reeve (Teachers College, Columbia University, New York) verscheen het in den vorm van een verzameling artikelen van verschillende schrijvers in 13 landen [2]). Finantieele steun werd verleend door de Amerikaansche sub-commissie der C. I. E. M. Tevens werd besloten de artikelen, in het Fransch vertaald en eventueel omgewerkt, ook in l'Enseignement Mathématique te laten verschijnen. In de jaargangen 28 (1929), 29 (1930), 30 (1931) en 32 (1933) is dit geschied en het zijn de overdrukken van deze artikelen, welke thans, in één bundel vereenigd, voor ons liggen. Onder de 13 landen treffen we ook Nederland aan.

Een werk als dit, dat, naar Prof. Fehr terecht opmerkt, een welkome aanvulling geeft van de vroeger verschenen rapporten der C. I. E. M., leent zich weinig voor een uitvoerige bespreking. Vertegenwoordigd zijn Frankrijk, Italië, Zwitserland, Duitschland, Engeland, Nederland, Oostenrijk, Scandinavië, Tsjecho-Slowakije, Hongarije en Rusland, alsmede, buiten Europa, de Vereenigde Staten van Noord-Amerika en Japan. Onder de schrijvers vinden we enkele bekende namen op het gebied van wetenschap en onderwijs (Enriques, Lietzmann, Heegaard, Quido Vetter). De meeste rapporteurs beginnen met een korte uiteenzetting van het onderwijsstelsel in hun land. Sommige geven den tekst van leerplannen of exameneischen, noemen titels van in hun land verschenen moderne schoolboeken of didactische werken. In verschillende rapporten krijgt ook de opleiding der leeraren een plaats,

---

[1]) Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Publications du Comité Central. 3me série (1928—1932), 140 bl., prijs 6 francs (Zwitsersch). Genève, Georg & Cie. 1933.

[2]) The National Council of Teachers of Mathematics. The fourth Yearbook. Bureau of Publications. Teachers College, Columbia University. New York City 1929.

terwijl enkele schrijvers opgaaf verstrekken van de in hun land bestaande vereenigingen van wiskundigen, zoowel van wetenschappelijk als van onderwijskundig karakter. Over het algemeen zijn de artikelen kort; een der uitvoerigste is dat van W. D. Reeve over de Vereenigde Staten, dat omstreeks 20 bladzijden telt.

Deze aanduidingen mogen voldoende zijn om de overtuiging te wekken, dat hier een materiaal voor documentatie ligt opgehoopt, dat bij mijn weten niet gemakkelijk op andere wijze is te verkrijgen en dat, naar ik meen, hier te lande nog veel te weinig bekend is.

De enquête over de leeraarsopleiding. Even belangrijk, hoewel in ander opzicht, is het rapport over de opleiding van den leeraar in wiskunde, waaraan het laatste tot dusver verschenen geschrift der C. I. E. M. is gewijd [1]).

Talrijk zijn in binnen- en buitenland degenen, die zich met de opleiding van den leeraar in het algemeen en met die van den wiskunde-leeraar in het bijzonder hebben beziggehouden. Beperken we ons hier tot de laatste, dan denken we ook hier weer aan Felix Klein, wiens belangstelling ook in deze richting ging en die niet alleen herhaaldelijk over dit onderwerp sprak en schreef, maar ook door zijn „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" krachtig aan een betere voorbereiding tot het leeraarsambt meewerkte, aan Paul Stäckel (1862—1919) en zoo vele anderen. Concrete voorstellen tot verbetering deed de Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte op haar vergadering te Dresden (1907) [2]), dezelfde onderwijscommissie, die het bekende Meraner Leerplan heeft opgesteld en waaruit later de „Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" (D. A. M. N. U.) is voortgekomen. We vermelden overigens nog, dat de *geschiedenis* van de opleiding van

---

[1]) Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique. Publications du Comité Central. 4e série (1933—1934), 163 bl., prijs 8 francs (Zwitsersch). Genève, Georg & Cie. 1934.

Het geheele rapport komt ook voor in l'Ens. Math. **32** (1933).

[2]) Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und der Naturwissenschaften. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte, 79. Versammlung in Dresden 1907. Erster Teil, bl. 40—83. Ook in: A. Gutzmer. Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte. Leipzig, Teubner 1908 (bl. 264—306).

den wiskunde-leeraar in Pruisen het onderwerp is van een uitvoerige gedocumenteerde studie van W. Lorey[1]).

Ons land is, zij het ook veel later en op veel kleiner schaal, niet achtergebleven. Letten we ook hier alleen op den wiskunde-leeraar dan vinden we vooreerst de voortreffelijke publicaties van de Commissie-Beth[2]) en van haar secretaris en, iets later, het rapport der Commissie-Verrijp[3]).

Bezien we het rapport der C. I. E. M. wat nader, dan ontwaart de Nederlandsche lezer met eenige teleurstelling, dat onder de 14 landen, die bijdragen hebben geleverd, zijn eigen land niet voorkomt, een teleurstelling, die er niet minder op wordt als men leest, dat de secretaris herhaaldelijk om antwoord heeft verzocht. Onder de schrijvers vinden we weer namen van vooraanstaande personen, b.v. den ook hier te lande aan velen bekenden Inspecteur-Generaal van het middelbaar onderwijs in België Dr. F. Sterkens — thans tijdelijk in de nog hoogere functie van Kabinetshoofd werkzaam — en van zijn Italiaanschen ambtgenoot Prof. A. Perna, dien sommigen onzer zich zullen herinneren van de Internationale Congressen voor het Middelbaar Onderwijs. In tegenstelling met de vorige publicatie zijn hier de bijdragen in verschillende talen (Fransch, Duitsch, Engelsch en Italiaansch) geschreven.

Een ander verschilpunt is, dat hier door een enkelen rapporteur een overzicht wordt gegeven van het geheele werk. Deze rapporteur, die niemand minder is dan de bekende Genueesche hoogleeraar Gino Loria[4]), begint zijn verslag met eraan te herinneren hoe 18 jaren zijn verstreken sedert hij de opdracht tot deze werkzaamheid aanvaardde. Immers ingevolge het besluit van het Congres te

---

[1]) W. Lorey, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und in einigen norddeutschen Staaten (Deutsche IMUK-Abh. I, 3). Leipzig, Teubner 1911. Ook over andere Duitsche staten bestaan zulke monographieën.

[2]) E. J. Dijksterhuis, Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in de wis- en natuurkunde (Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 2e Jaarg. 1925—'26, bl. 81—95). Verder: Nadere beschouwingen over de opleiding tot leeraar in wis- en natuurkundige vakken (t.a.p. bl. 146—157). Beide ook als brochure (Groningen, Noordhoff).

[3]) De Universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken. Rapport (Weekbl. voor gymn. en middelb. onderwijs **23.** 1926—'27, bl. 1275—1289).

[4]) Gino Loria (geb. 1862) is sedert 1891 gewoon hoogleeraar aan de Universiteit te Genua.

Parijs confereerde hij in Juli 1914 met Fehr en Felix Klein ten huize van laatstgenoemde te Göttingen, teneinde een vragenlijst op te stellen aangaande de opleiding van den wiskunde-leeraar. „Ces heures," schrijft Loria, „forment un des plus chers souvenirs de ma vie et, en les comparant à celles qui les suivirent, je peux bien dire qu'elles ont été les dernières heureuses que j'ai passées." De oorlog maakte verdere samenwerking onmogelijk en het rapport, dat Duitschland in 1915 toch nog opstelde, bleef voorloopig ongebruikt. Het zou tot het congres van Zürich (1932) duren, voordat het voorgenomen werk verricht was, thans helaas zonder de medewerking van Klein.

De samenvatting van Gino Loria is ongetwijfeld origineel. In de afgeloopen zomervacantie — zoo vertelt hij — ontmoette hij een jongen man, die levendig belangstelt in de wiskunde en het wiskunde-onderwijs. Telkens komt hij den hoogleeraar opzoeken en vragen stellen, waarop deze hem tracht in te lichten. „Emile" — zoo noemt hij, naar het illustre voorbeeld van Rousseau, zijn leerling — doet zijn mentor soms moeilijke vragen, denkt over de antwoorden na en komt er na eenigen tijd weer op terug. Zoo weet Loria zijn Emile en daarmee zijn lezers een vergelijkend overzicht te geven van de verschillende landen.

De vragenlijst, die dezelfde is als die van 1914, maar hier en daar wat aangevuld, is zeer uitvoerig. Zoo wordt natuurlijk eerst naar de wetenschappelijke vorming gevraagd, maar dan ook naar de paedagogische opleiding en practische vorming. Deze blijkt inderdaad in vrijwel alle beschouwde landen te bestaan; alleen in Frankrijk is men sceptisch en meent men dat een grondige wetenschappelijke opleiding vanzelf de goede practische vorming in zich sluit, een meening die ten onzent nog vaak in universitaire kringen wordt gehoord. Bij een bespreking der Ecole Normale Supérieure wordt met instemming een uitspraak van Gustave Lanson aangehaald: „Exposer une question clairement et avec ordre, la discuter avec précision, être exact sans minutie ni encombrement, simplifier sans mutiler, montrer les idées générales sans perdre le contact du concret et de la vie: il n'y a pas de professeur français dans nos facultés, qui sous prétexte qu'il fait de la science pure, renonce à exiger de ses étudiants ces qualités d'exposition et à leur montrer, sur un sujet donné, comment on peut s'y prendre pour les avoir Or n'est-ce pas là de la pédagogie et de la meilleure, quoique

le mot ne soit jamais prononcé? Voilà pourquoi à l'école, on a toujours parlé de science plutôt que de pédagogie."

Maar de vragenlijst informeert naar nog veel meer. Als er een opleiding voor het leeraarsambt bestaat, valt deze dan in den studietijd of daarna? Geschiedt ze aan de Universiteit of daarbuiten? Wordt ze afgesloten door een examen? Hoe kunnen in dienst zijnde leeraren op de hoogte blijven van hun vak (studieverloven, vacantiecursussen)? Komt het voor, dat leeraren bij het middelbaar onderwijs tot hoogleeraar worden benoemd? In België blijkt dit zelden voor te komen en noemt men slechts Neuberg en Stuyvaert als voorbeelden. Ook de materieele zijde van het leeraarsambt (salarissen, pensioenen) komt ter sprake, alsmede het aantal lesuren per week, dat overal minder, vaak véél minder dan bij ons blijkt te zijn en menigmaal bij den leeftijd van 50 jaar nog afneemt. Wordt aan de Universiteiten ook lagere wiskunde van hooger gezichtspunt uit onderwezen? Ook toegepaste wiskunde? Belangrijk is ook de bibliographie aan het eind van ieder rapport, waar we behalve de reeds lang bekende werken van Klein, Enriques, Nunn, e.a. ook nieuwere aantreffen, zooals de Elementarmathematik van Fladt. Verscheiden berichtgevers lichten ons ten slotte nog in over tijdschriften en vereenigingen in hun land, zoowel van zuiver wetenschappelijke als van didactischen aard. De lengte der rapporten varieert van 5 bl. (Noorwegen) tot 30 bl. (Frankrijk). Het Amerikaansche rapport is slechts voorloopig; men heeft daar de zaak zoo breed opgezet, dat men het resultaat later in boekvorm heeft moeten uitgeven [1]).

Zal ik erin geslaagd zijn, belangstelling voor de C. I. E. M. en haar werk te wekken? Ik weet het niet. Wel ben ik ervan overtuigd, dat het tot schade van het Nederlandsche wiskunde-onderwijs zou zijn, als men in ons land in dit opzicht onverschillig bleef. Het is alleen deze overweging geweest, die me er toe heeft gebracht, een en ander in ruimer kring bekend te maken.

Utrecht, Sept. 1935.

---

[1]) Ben A. Sueltz, The Status of Teachers of Secondary Mathematics in the United States. A study made for the American Committee of the International Commission on the teaching of mathematics. 151 bl. Cortland—New York 1934.

DE RESTSTELLING

DOOR

P. WIJDENES.

De lezers kennen allen de reststelling; deze heeft betrekking op een bijzonder geval van de deling van een veelterm door een veelterm van lagere graad. Daarover maar eens eerst; nu kan ik wel twee veeltermen nemen van de graden m en n (m en n zijn natuurlijke getallen en $m > n$), maar even algemeen blijft, hetgeen we beweren, als we ons beperken tot hoogstens $m = 5$ en $n = 3$; de uitbreiding ligt voor de hand, is eigenlijk nergens dienstig voor en geeft maar lange vormen en stippelnotaties. Mede voor het gemak geven we de eerste termen van de veeltermen de cofactor 1. We nemen

$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 77x^2 - 85x - 60$, aan te duiden als V_1,
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, „ „ „ „ V_2,

en stellen ons tot taak twee nieuwe gehele rationale functies te bepalen, die we met Q en R aanduiden en die als volgt verbonden zijn met V_1 en V_2:

$V_1 = QV_2 + R$; natuurlijk zijn hier meerdere oplossingen mogelijk, maar slechts één als we eisen, dat R hoogstens van de 2e graad is in x.

We stellen $Q = x^2 + ax + b$ en $R = cx^2 + dx + e$; van a, b, c, d en e kunnen er een of meer nul zijn.

$$\begin{array}{l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ x^2 + ax + b \\ \hline x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 \\ \quad + ax^4 - 6ax^3 + 11ax^2 - 6ax \\ \qquad\qquad bx^3 - 6bx^2 + 11bx - 6b \\ \qquad\qquad\qquad cx^2 + dx + e \\ \hline \end{array}$$

De optelling moet V_1 leveren; we hebben dus

$$\begin{cases} -6+a=-6 \\ 11-6a+b=-5 \\ -6+11a-6b+c=77 \\ \quad -6a+11b+d=-85 \\ \quad\quad -6b+e=-60 \end{cases}$$

Uit dit stelsel vergelijkingen [1]) vindt men $a=o$; $b=-16$; $c=-13$; $d=91$; en $e=-156$.

We vinden:

$$x^5-6x^4-5x^3+77x^2-85x-60\equiv$$
$$(x^3-6x^2+11x-6)\,(x^2-16)+(-13x^2+91x-156)\ldots\ldots(1).$$

Wat we hier gedaan hebben, noemen we: *V_1 delen door V_2*; de som QV_2+R is een andere vorm voor V_1 evenals b.v. $x^5-6x^4-6x^3-6x^2+6x-6+(x^3+83x^2-91x-54)$ een andere vorm is voor V_1; zodat voor elke waarde, die men aan x geeft, V_1 en QV_2+R in dezelfde getallen overgaan. *Ook voor x_1, een nulpunt van V_2; voor x_4, een nulpunt van Q.* Opzettelijk heb ik voor wat gehele nulpunten gezorgd; (1) is nl.

$$x^5-6x^4-5x^3+77x^2-85x-60\equiv$$
$$\underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)}_{V_2}\times\underbrace{(x-4)(x+4)}_{Q}+\underbrace{13(x-3)(4-x)}_{R.}$$

Daar uitwerking van $V_2\,Q+R$ het eerste lid levert, worden beide leden ook gelijk voor de volgende waarden van x : 1; 2; 3; 4 en —4.

---

[1]) Als $V_1=p_0x^5+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5$ is en
$V_2=q_0x^3+q_1x^2+q_2x+q_3$,
$Q=r_0x^2+r_1x+r_2$,
$R=s_0x^2+s_1x+s_2$,
geeft vermenigvuldiging en gelijkstelling:

$$\begin{aligned} q_0r_0&=p_0\\ q_1r_0+q_0r_1&=p_1\\ q_2r_0+q_1r_1+q_0r_2&=p_2\\ q_3r_0+q_2r_1+q_1r_2+s_0&=p_3\\ q_3r_1+q_2r_2+s_1&=p_4\\ q_3r_2+s_2&=p_5 \end{aligned}$$

Hierbij krijgt r_0 een bepaalde waarde nl. p_0/q_0: p_0 en q_0 zijn beide ongelijk nul; r_1, r_2 hebben in de 2e en 3e verg. tot cofactor $q_0\neq 0$; voor r_1 en r_2 vindt men dus een bepaalde waarde; s_0, s_1 en s_2 hebben 1 tot cofactor. Alleen $r_0\neq 0$; alle andere kunnen nul zijn natuurlijk.

Anders: we moeten oplossen r_0, r_1, r_2, s_0, s_1, s_2; de determinant van het stelsel is:

$$\begin{vmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0\\ q_3 & q_2 & q_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & q_3 & q_2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=q_0^3\neq 0.$$

Het stelsel laat dus één enkele oplossing toe.

De bewerking, waarvoor V_1 wordt omgezet in $QV_2 + R$, kan ook worden uitgevoerd door de volgende rekenwijze:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \,)\, x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 77x^2 - 85x - 60 \,(\, x^2 - 16 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 16x^3 + 83x^2 - \;\;85x - \;\;60 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{- 16x^3 + 96x^2 - 176x + \;\;96} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; - 13x^2 + \;\;91x - 156
\end{array}
$$

Deze komt overeen met de deling uit de rekenkunde; het is een algorithmus om tot (1) te komen en nu is het zo ontzettend jammer, dat deze aangeduid wordt met het woord deling. Dat heeft al menigeen lelijke parten gespeeld en niet enkel schooljongens. Als men in

$$
\begin{aligned}
&x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 77x^2 - 85x - 60 \equiv \\
&\qquad (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\ (x^2 - 16) - 13\ (x - 3)\ (x - 4)
\end{aligned}
$$

b.v. $x = 1$ wil nemen (een nulpunt van de deler), dan is dat, zeggen ze, verboden, want dan zou je gedeeld hebben door nul! *Maar dat is er vlak naast;* onze algorithmus heeft niets te maken met de „omgekeerde bewerking" van de vermenigvuldiging; behalve, dat hij er de vorm mee gemeen heeft b.v. 1623) 193865 (. . . .

Als men met de delingsrekenwijze (1) heeft afgeleid, mag men daarna natuurlijk in beide leden ook de nulpunten van de deler substitueren.

Hoe ik er toe kom over het bovenstaande te schrijven? In Nieuwe Schoolalgebra III worden twee bewijzen van de reststelling gegeven; het tweede luidt:

Men deelt $(x - a)$ op $f(x)$; de rest is een vorm van lagere graad dan $x - a$, dus van de graad nul in x; deze bevat geen x meer; dan is $f(x) = (x - a)\ \varphi\ (x) + R$. Hiermee is een identiteit ontwikkeld; het wezen van een identiteit is, dat beide leden voor elke waarde, aan de letters toe te kennen, in getalwaarde gelijk zijn. We substitueren in beide leden nu voor x de waarde a; er komt dan $f(a) = 0 \times \varphi(a) + R = R$; dus is $R = f(a)$.

Voor enige weken zei een collega: „die reststelling doe ik anders; als je toch deelt door $x - a$ en later $x = a$ stelt, dan deel je feitelijk door nul (het standpunt hierboven besproken en dat ik al zo dikwijls heb zien innemen). Jij haalt de merkwaardige quotienten uit de reststelling; ik doe het net andersom". Ik zal de lezers

even inlichten, hoe de reststelling met de merkwaardige quotienten wordt bewezen.

$px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = p\,(x^4 - a^4) + q\,(x^3 - a^3) + r\,(x^2 - a^2) + s\,(x - a) + pa^4 + qa^3 + ra^2 + sa + t$; $x^4 - a^4$, enz. zijn deelbaar door $x - a$; de rest van de deling is dus $f(a)$. — Zo, dus moet ik vooraf de merkwaardige quotienten nagaan; één voorbeeld is genoeg: $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$. Substitueer nu eens $a = b$! Dat is net de enige waarde met voetangels en klemmen. In geen geval dus met de merkwaardige quotienten; hoeft ook niet; immers $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$; dit is volmaakt in orde, ook voor $a = b$. Maar waarom een weg gekozen met een hindernis, als er twee begaanbare paden tot het doel voeren? De eenvoudigste weg is: herleid $f(x)$ tot $(x - a)\,\varphi(x) + R$; hoe dat hindert niet; volgt men daarbij, als de graad van $f(x)$ wat hoog is, het middel van de staartbewerking, goed; als men die bewerking maar niet opvat als de inverse van de vermenigvuldiging; de substitutie van $x = a$ is daarna geoorloofd.

Natuurlijk vindt ieder, dat de substitutie van —2 en van 2 in $x^2 = (x + 2)\,(x - 2) + 4$ gelijke leden geeft, maar . . . . . als men op de volgende manier tot het tweede lid is gekomen:

$$\begin{array}{rl} x+2\,)\,x^2 & (\,x-2 \\ \underline{x^2+2x} & \\ -2x & \\ \underline{-2x-4} & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x-2\,)\,x^2 & (\,x+2 \\ \underline{x^2-2x} & \\ 2x & \\ \underline{2x-4} & \\ 4 & \end{array}$$

daarna $f(x) = (x + 2)\,q + r$ en $f(x) = (x - 2)\,q_1 + r$ wordt geschreven, dan is in het eerste geval de substitutie van —2, in het tweede van 2 uitgesloten „want je hebt, als je dat doet, gedeeld door nul!".

Ik heb een paar aanhalingstekens gezet; het zijn woorden in de mond van hen, die de zaak niet goed inzien. Laat ik bij dit voorbeeld blijven: reeds voor Kerstmis komt men in de eerste klas tot $(x + 2)\,(x - 2) = x^2 - 4$; geldt dit nu voor $x = -2$ en $x = 2$, ja of neen? Natuurlijk, ja; dus ook $(x + 2)\,(x - 2) + 4 = x^2$. Om van x^2 tot $(x + 2)\,(x - 2) + 4$ te komen hoef ik helemaal niet te delen; evenmin om van x^3 tot $(x + 1)\,(x^2 - x + 1) - 1$ te komen; evenmin om tot (1) van blz. 82 te komen; de bewerking

is niet de inverse van de vermenigvuldiging en niet $\frac{f(x)}{x-a}$. De zaak is zo eenvoudig:

uit $p = rs + t$ volgt voor $r \neq 0$ $\frac{p}{r} = s + \frac{t}{r}$;

uit $p = 0 \times s + p$ volgt niet $\frac{p}{0} = s + \frac{p}{0}$.

Ik heb het bij (1) ook helemaal niet over

$\frac{x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 77x^2 - 85x - 60}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$, maar over

$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 77x^2 - 85x - 60 = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,Q + R.$

Tot slot, heel kort: er zijn er, die klakkeloos delen door 0, alsof men daarmee zou kunnen handelen als met de positieve en negatieve getallen. Ook zijn er, die ten onrechte menen, dat de beperking $x \neq 2$ bij $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ ook behoort te staan bij

$$x^2 - 4 = (x - 2)\,(x + 2).$$

Bij het bewijs van de reststelling zetten we *niet*

$$\frac{f(x)}{x-a} = \varphi(x) + \frac{R}{x-a},$$

maar $f(x) = (x-a)\,\varphi(x) + R$, hetgeen ook doorgaat voor elke waarde, die $x - a$ of $\varphi(x)$ nul maakt. Het woord in het bewijs, dat het misverstand doet ontstaan, is „deelt”; in een volgende druk zal het iets anders worden ingekleed.

BOEKBESPREKINGEN.

P. WIJDENES, *Lagere Algebra II* (Vergelijkingen, functies, grafieken en reeksen). Derde druk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V. 1935. 485 bldz. Prijs geb. *f* 8,50. Voor inteekenaars op Noordhoffs wiskundige tijdschriften tijdelijk *f* 6,50.

Wijdenes' Lagere Algebra draagt als ondertitel: leerboek voor de akte wiskunde L.O. Men krijgt den indruk, dat dit examen zich sterk in de richting naar de wiskunde ontwikkeld heeft; met het aangewezen leerboek voor het vak algebra is dit althans het geval. Legt men dezen derden druk naast den in 1927 verschenen tweeden, dan treft vooral de grootere nauwkeurigheid in definities en bewijzen. Het boek is daardoor mijns inziens veel geschikter geworden, om aankomenden leeraren als vraagbaak te dienen.

De schrijver geeft in zijn voorbericht de onderdeelen aan, waarin ingrijpende veranderingen zijn aangebracht: binomiale vergelijkingen, functies en grafieken, extremen der gebroken functie, en ongelijkheden. Vooral de opneming van laatstgenoemd onderwerp heb ik met ingenomenheid gezien; weliswaar vonden de ongelijkheden reeds eene behandeling in Wijdenes' Middel-Algebra, maar de plaatsing in een standaardwerk over lagere algebra legt er als het ware den nadruk op, dat het onderwerp tot de elementaire behoort, en dus ook eene plaats in het schoolonderwijs verdient.

Belangrijk, waarschijnlijk voor den examencandidaat, maar zeker ook voor den leeraar, is het degelijke hoofdstuk over gebroken rationale vergelijkingen. Op het gebied dezer zoogenaamde „vergelijkingen met breuken" wordt geweldig geknoeid (zooals Dr. Wansink in den vorigen jaargang van dit tijdschrift heeft aangewezen); in de Lagere Algebra vindt men eene betrouwbare behandeling van deze eigenlijk zoo eenvoudige materie; nauwkeurig wordt nagegaan, hoe door eene doelmatige uitbreiding van het begrip wortel eener vergelijking de stellingen over gelijkwaardigheid van gebroken rationale vergelijkingen tot eenvoudige formuleeringen kunnen worden gebracht. (De vraag, of zulk eene uitbreiding geoorloofd is, heeft in jaargang VI van dit tijdschrift een onderwerp van discussie uitgemaakt.)

Kenschetsend voor den geest, waarvan het werk is doortrokken, is de bijzondere aandacht, die voortdurend gewijd wordt aan het begrip gelijkwaardigheid van vergelijkingen en van stelsels vergelijkingen. Deze steekt scherp af bij de ouderwetsche methode, die meer licht deed vallen op onjuiste dan op juiste oplossingsmethoden, en hoofdstukken wijdde aan het invoeren en het verduisteren van wortels.

Het is te hopen, dat langzamerhand deze nieuwe geest ook het schoolonderwijs gaat doortrekken, want de verbetering daarvan is toch het einddoel. J. H. S.

Dr. F. SCHUH, *Leerboek der theoretische mechanica.* Eerste deel, tweede stuk. Leiden, A. W. Sijthoff's Uitgeversmaatschappij N.V., 1935. 391 bladz. Prijs *f* 12,50.

Van Prof. Schuh's standaardwerk over de theoretische mechanica, waarvan reeds eerder zijn verschenen het eerste stuk van het eerste en het eerste stuk van het tweede deel (zie de bespreking in „Euclides" VIII, bldz. 46 en bldz. 157), heeft thans het tweede stuk van het eerste deel het licht gezien, en daarmede is de behandeling van de kinematica voltooid. Het thans verschenen stuk bevat het vervolg van de kinematica van een vlak stelsel, wat betreft de algemeene theorie, namelijk de versnellingsdistributie, en laat daarop volgen de behandeling van een aantal bijzondere bewegingen, als cycloidale, conchoidale en drijfstangbeweging en de bewegingen van stangenvierzijden. Daarop volgt een hoofdstuk over de beweging van een vast lichaam in de ruimte.

Het werk is zeer wiskundig van opvatting, bevat 450 vraagstukken, en een register, dat den gebruiker zeker goede diensten zal bewijzen bij het naslaan van de vele bijzondere ontwikkelingen. J. H. S.

Dr. C. H. VAN OS, *Inleiding tot de functietheorie,* 245 blz. P. Noordhoff N.V. Groningen—Batavia, *f* 4,90. geb. *f* 5,75.

De Schrijver behandelt in het eerste hoofdstuk de bewerkingen met complexe getallen, in het tweede de transformaties (afbeeldingen) van de verschillende eenvoudigste functies, waarin in 't bijzonder de beteekenis der vertakkingspunten in het licht gesteld wordt. Daarna komt in het derde hoofdstuk de differentiaalrekening aan de beurt (natuurlijk, zooals dat in de volgende hoofdstukken het geval is, bij complexe veranderlijken). Hoofdstuk IV behandelt de integraalrekening (met hare residustellingen voor enkelvoudige en meervoudige polen). Het vijfde hoofdstuk behandelt de reeksen, waar de beteekenis van singuliere punten nog eens goed voor den dag komt, terwijl het slot gevormd wordt door het zesde hoofdstuk, waarin in 't bijzonder de oppervlakken van Riemann besproken worden.

Bij de lezing van dit boek door ons, ouderen, treft het weer eens, hoe gemakkelijk het de tegenwoordige jeugd wordt gemaakt. Waar wij zoo stuksgewijs ons in de wiskundige wetenschap hebben moeten inwerken, worden aan de studeerenden thans (vooral Nederlandsche) boeken voorgezet, die hen in verschillende gebieden een behoorlijke inleiding verschaffen. Inderdaad voldoet het hier besproken boek aan eischen, die men aan een „inleiding" in de functietheorie mag stellen. Het is zeer duidelijk geschreven en bevat tal van uitgewerkte voorbeelden. De duidelijkheid gaat wel eens zoover, dat men — in 't bijzonder vóór de behandeling der differentiaalrekening (b.v. blz. 28 Immers.... en een en ander van § 16) — de gedachte bij zich voelt opkomen, dat de Schr. aan den lezer wel wat meer had kunnen overlaten. Toch kan men dit moeilijk als een fout van het boek beschouwen, daar toch een uitvoerige uiteenzetting den beginner in de wetenschap leert, dat men niet vluchtig over een en ander moet heenloopen.

Anderzijds komen toch ook eenige passages voor, waar de uiteenzetting wel wat aan duidelijkheid had kunnen winnen door een andere „zegging" (b.v. blz. 69 Gaat het punt...., blz. 95 onder en blz. 96 boven, blz. 132).

Ik wil thans ook nog eenige kleine op- en aanmerkingen maken over bepaalde punten. In de eerste plaats over de functie $\sqrt[q]{z^p}$ of $z^{\frac{p}{q}}$ ($\frac{p}{q}$ eventueel *niet* vereenvoudigen!) (blz. 19, 55, 56, 57 enz.). Dat men deze functie scherp heeft te onderscheiden van $(\sqrt[q]{z})^p$, juist bij een mogelijke vereenvoudiging van $\frac{p}{q}$, mocht wel uitdrukkelijk vermeld zijn. Verder treft men op blz. 20 een definitie van een continue functie aan, waarbij de ε-zegswijze — waarvan de Schr. volgens verdere behandelingen (b.v. blz. 180) mutatis mutandis toch niet afkeerig is — wel op haar plaats was geweest. Op blz. 156 wordt naar de reëele integraalrekening verwezen. Ik denk dat de lezer het bewijs van de convergentie der daar genoemde reëele integralen wel in het boek zelf had willen zien! Op blz. 151 zou, al staat 't er niet zóó, de indruk gewekt kunnen worden, dat $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ niet zonder complexe integratie te vinden is. Er had wel vermeld mogen zijn, dat dit toch niet 't geval is.

Ten slotte een paar vergissingen: Op blz. 71 staat abusievelijk: sh y is zuiver imaginair! Op de bladzijden 178 en 189 heeft de Schr. zich in zijn berekeningen vergist. Resp. krijgt men daar

$$\left|S_n\right| = \sqrt{\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}} < \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| \quad \text{en} \quad \left|S_{n+p}-S_n\right| < \left|\frac{a_n}{\sin\frac{x}{2}}\right|.$$

Al vond ik nog al eenige drukfouten — een lijstje daarvan was niet overbodig geweest —, zinstorend zijn die over 't algemeen niet.

Ondanks mijn op- en aanmerkingen aarzel ik toch niet om ten slotte 't boek een „goed" boek te noemen. Van de drie categorieën die de Schr. in zijn voorrede noemt, voor welke hij het boek bedoeld heeft (Delftsche studenten, universiteitsstudenten en leeraren), denk ik, dat de studenten aan de Universiteiten er het meeste profijt van kunnen trekken.

D. P. A. V.

K. H. W. VISSER, *Analytische meetkunde, Differentiaal- en integraalrekening voor M.T.S.* 136 blz. 73 fig. *f* 1,75. P. Noordhoff, Groningen—Batavia.

Volgens het Voorbericht van het leerboek bevat het leerplan voor het tweede leerjaar van de middelbare technische scholen sinds enige tijd ook hogere wiskunde. Aan deze bepaling nu heeft het boek van Visser zijn ontstaan te danken. — Uit het feit, dat deze leerstof bestemd is voor leerlingen, die in 't algemeen een wiskundige opleiding genoten hebben, welke overeenkomt met het wiskundeonderwijs der eerste drie klassen van een 5-j. H.B.S., gevolgd door één jaar wiskunde-onderwijs aan een middelbare technische school, volgt direct, dat men aan de wijze, waarop de boven genoemde delen der hogere wiskunde in dat leerboek behandeld zijn, niet mag stellen de eis van „theoretische"

strengheid, maar wèl die van „practische” bruikbaarheid. Het wil mij voorkomen, dat de schrijver hierin zeer goed geslaagd is. Hieruit moet niet worden afgeleid, dat het doorwerken van dit leerboek voor den gemiddelden leerling van een M.T.S. een taak is, welke hem gemakkelijk zal vallen, integendeel het zal van hem ernstige inspanning vragen, ja zelfs zonder behandeling van de leerstof in de klas acht ik het zó goed als onmogelijk vóor hem. In het 136 bladzijden tellende leerboek wordt den leerling aangeboden een, volgens mijn mening goed geordende opeenvolging van onderwerpen uit de in de titel genoemde drie gedeelten der hogere wiskunde op een wijze, waardoor aan het „hogere” der wiskunde ontnomen is het „onverteerbare” voor den niet bij uitstek mathematisch geschoolden, of mathematisch aangelegden leerling van een middelbare technische school. De analytische meetkunde eist vóor zich op een 56 bladzijden. In een tiental hoofdstukken worden behandeld: de coördinaten; 't punt; de rechte lijn; de cirkel; enige functies zoals $xy = c$, $y = ax^2 + bx + c$; uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$; derde-machtsvergelijking met meetbare wortels, grafische oplossing daarvan en de kegelsneden. Aan het einde van elk hoofdstuk is, als herhaling, geplaatst een serie vraagstukken, terwijl er bovendien na iedere paragraaf theorie ook vraagstukken zijn opgegeven. Er is dus zeer zeker voldoende oefenmateriaal aanwezig en naar het mij wil voorkomen, zijn die vraagstukken in 't algemeen goed gekozen. Misschien kan er aan de redactie van een enkel vraagstuk bij een mogelijke herdruk hier of daar wel eens iets worden verbeterd, terwijl er dan ook een sporadisch voorkomende drukfout zou kunnen worden weggenomen. De voorbeelden, welke in de theorie uitgewerkt zijn, zijn naar mijne mening met zorg gekozen en werken verduidelijkend. Dit gedeelte van het leerboek is voor den leerling m.i. het gemakkelijkst te verwerken en bevat voor hem geen bijzondere moeilijkheden.

De differentiaalrekening wordt behandeld in één hoofdstuk, en vraagt daarvoor, met inbegrip van de vraagstukken, een 28-tal bladzijden. Hierin worden behandeld: eerste afgeleide van een functie met de meetkundige betekenis daarvan; uiterste waarden; regels voor het differentiëren; goniometrische en cyclometrische functies; de functies $y = e^x$ en $y = ln\ (x)$; samengestelde functies; $\frac{dy}{dx}$ als richtingscoëfficiënt van de raaklijn en de kromtestraal, terwijl bij dit laatste onderwerp even wordt aangegeven de voorwaarde, waarvoor de grafische voorstelling van de functie een buigpunt vertoont. Ook de behandelingswijze van dit gedeelte kan ik niet anders dan goed geslaagd noemen, hoewel ik niet zal ontkennen, dat hier meerdere moeilijkheden voor den leerling aanwezig zijn, welke echter voor hem, vooral na bespreking in de klasse niet onoverkomelijk zijn.

De integraalrekening wordt in de twee volgende hoofdstukken behandeld. Hiervan neemt het eerste hoofdstuk voor zijn rekening de behandeling der eenvoudigste regelen, nodig voor het bepalen van die onbepaalde integralen, welke zich het meest zullen voordoen aan den leerling bij het gebruik, dat door hem van de integraalrekening zal worden gemaakt. Het integreren wordt hier ingevoerd als de omgekeerde bewerking van het differentiëren, een behandelingswijze, waarmee ik me volkomen kan verenigen, gezien voor welke doeleinden dit

leerboek geschreven is. In 't geheel is aan deze behandeling gewijd een 13-tal bladzijden, waarin ook weer een voldoend aantal vraagstukken is opgenomen De bestudering van dit gedeelte zal ongetwijfeld van den leerling inspanning vereisen, maar deze inspanning wordt wel beloond. — In het tweede hoofdstuk, dat met de vraagstukken inbegrepen, een 21-tal pagina's omvat, worden behandeld bepaalde integralen, welke ontstaan als gevolg van de toepassing der integraalrekening voor 't bepalen van: oppervlakken; inhouden van omwentelingslichamen; zwaartepunten; lengten van delen van gebogen lijnen en traagheidsmomenten. De wijze van behandeling dezer onderwerpen kan ook weer mijn goedkeuring wegdragen, natuurlijk onder bijvoeging van „gezien voor welke doeleinden dit leerboek geschreven is."

In een slothoofdstuk van een twaalftal bladzijden worden nog opgesteld de paramatervergelijkingen van: de cirkel; de ellips, de cycloïde; de ontwondene van de cirkel; de epi- en de hypo-cycloïde, terwijl met behulp van die vergelijkingen nog bepaald wordt de richtingscoëfficient van de raaklijn, getrokken in een bepaald punt aan elk der genoemde krommen, met uitzondering van de cirkel. — Met behulp van poolcoördinaten worden dan de vergelijkingen van de spiraal van Archimedes en de hyperbolische spiraal nog opgegeven; enkele punten hiervan worden aan de hand van die vergelijkingen bepaald en tevens wordt aangegeven, hoe of men kan berekenen de tangens van de hoek, welke de raaklijn in een punt aan de spiraal getrokken, maakt met de voerstraal naar dat punt. Ook deze behandeling is geheel gehouden binnen de grenzen der strengheid, welke de schrijver van dit leerboek zich terwille van het beoogde doel gesteld heeft. Het leerboek eindigt met een zestigtal vraagstukken, welke zich, naar mij bij doorlezing voorkomt, goed bij de behandelde leerstof aansluiten.

Aan 't einde van mijn bespreking van dit leerboek, dat volgens mij een goed schoolboek genoemd moet worden, ook wat betreft de wijze van uitvoering der figuren en de zeer goede en duidelijke druk, wil ik uitdrukkelijk de volgende opmerkingen maken. In de eerste plaats sluit een aanbeveling van een leerboek over onderwerpen uit de hogere wiskunde voor het middelbaar technisch onderwijs door mij, niet in, dat ik het eens ben met een plaatsing van die leerstof op het programma der middelbare technische scholen. Ik voor mij meen een dergelijke verzwaring van leerstof toch meer te zien, als een uitvloeisel van het systeem „vakleraren", dan van de noodzakelijke eisen der praktijk. In de tweede plaats meen ik te moeten opmerken, dat de geschiktheid van een leerboek altijd nog het beste blijkt uit de beoordelingen van de leerlingen daarover tijdens het gebruik van het boek. Daarom hoop ik ook van harte, dat aan dit leerboek een ruime kans geboden zal worden, om zijn geschiktheid te kunnen bewijzen.

M. E. van Terwisga.

Werking, ontwikkeling en toepassing van de radio, door R. SWIERSTRA. 176 blz.; 169 fig.; ing. *f* 2.25, geb. *f* 2 65. (P. Noordhoff N.V. Groningen—Batavia. 1934).

Dit werkje heeft zijn ontstaan te danken aan de radiovoordrachten

door den schrijver op verschillende plaatsen in Nederland gehouden. Wie wel eens een voordracht van Swierstra heeft bijgewoond, zal zich niet verwonderen, dat door zijn toehoorders aandrang op hem is uitgeoefend, een boekje te schrijven, dat de behandelde stof — nog iets uitgebreid — op populaire wijze weergeeft. De schrijver verstaat bij uitstek de kunst, om met behulp van eenvoudige middelen, bij zijn toehoorders de illusie te wekken, dat zij de moeilijkheden van de ingewikkelde radio volkomen begrijpen.

In het eerste en tweede hoofdstuk wordt een inleiding gegeven in de eenvoudigste eigenschappen van de electriciteitsleer en de trillingstheorie De wijze waarop b.v. in § 17 de electrische trillingen worden behandeld, met behulp van een „watervoorbeeld" is verrassend. Een paar communicerende vaten, verbonden door een buis waarin een kraan, wordt vergeleken met een condensator waarvan de platen verbonden zijn door een draad, waarin een schakelaar. Daarna wordt dezelfde waterinstallatie, maar nu met een molentje, met schoepenrad in de buis en een vliegwiel erbuiten, vergeleken met een Thomsonse trillingskring. Op deze manier wordt den lezer spelenderwijs het begrip elektrische trillingskring bijgebracht, waarna de bespreking van de trillingskring van een antenne geen moeilijkheden meer oplevert. Ten slotte wordt het resonantieprincipe besproken, „dat de grondslag is voor de radio-overdracht".

Het derde hoofdstuk is gewijd aan het radio-ontvangtoestel. Hierin vindt de bespreking van de radiolampen plaats. De werking van een triode wordt met behulp van een schakelschema en een paar „schetsjes van het binnenwerk van de triode", glashelder uiteengezet. (Het is wel jammer dat deze stof door tijdnood op de H.B.S. 5 niet wat uitvoeriger behandeld kan worden, vooral omdat de meeste leerlingen voor deze dingen de grootste belangstelling hebben, wat men lang niet van alle onderdelen van het natuurkundeprogramma kan zeggen).

Het vierde hoofdstuk behandelt de ontwikkeling van de radio, een onderwerp, dat de meeste oudere lezers geheel meegemaakt hebben. Dit is juist een reden om het nog eens te lezen, we vergeten immers zo snel.

Het vijfde en laatste hoofdstuk bevat een bespreking van verschillende radiotechnische toepassingen: muziekinstrumenten — de radiosonde voor stratosfeeronderzoek — het ultrasonore echolood voor dieptemeting op zee — het principe van de beeldtelegrafie — enz.

Alles bijeengenomen een zeer geslaagd boekje, dat zeker zijn weg weg zal vinden, omdat het den lezer in staat stelt met weinig inspanning de hoofdzaken van de radio te leren begrijpen.

Radio-ontvangst in theorie en praktijk door R. SWIERSTRA. (N.V. Drukkerij Jacob v. Campen te Amsterdam. 1e deel 6e druk 242 blz. 144 fig. *f* 2.50, geb. *f* 3.10, 2e deel 6e druk 260 blz. 160 fig. *f* 3.—, geb. *f* 3.60. In één band *f* 6.—, 1934).

Dit werk van Swierstra is bestemd voor een andere lezerskring dan het vorige. Hier zal de serieuze radio-amateur, die wat meer wil weten van zijn liefhebberij, antwoord kunnen vinden op talloze vragen, die hij al experimenterende tegen moet komen. Ook in dit boek

worden we telkens verrast door de heldere betoogtrant. Verschillende vragen die bij den lezer (beter den leerling) op zullen komen, worden hier gesteld en daarna besproken. Dit maakt dat het boek niet het karakter heeft van een gewoon leerboek, terwijl het toch een uitnemend leerboek is. De sfeer van den gemoedelijken uitlegger, die de Heer S. is op zijn vele lezigen, ligt over dit boek, waardoor het aan aantrekkelijkheid heeft gewonnen, zonder ook maar iets aan doelmatigheid in te boeten.

In deel I worden de grondbeginselen van electriciteit, geluid en mechanica besproken, voorzover nodig bij de radio. Ook hier is weer nadrukkelijk de aandacht gevestigd op het resonantieprincipe, „dat de overdracht van trillingen op kilometers afstand mogelijk maakt". (Zie §§ 36 en 44). De 2e helft van dl. I is gewijd aan de eerste ontwikkeling van de radioontvanger.

Deel II bevat vooreerst de bespreking van de hulpapparaten, de voortplanting der radiogolven en de storingen, terwijl de 2e helft de latere ontwikkeling van het ontvangtoestel behandeld.

Stelselmatig is in beide delen het gebruik van formules vermeden, van de hulp, die de wiskunde kan bieden is volledig afgezien. De schrijver heeft het zich hiermee zeker niet gemakkelijker gemaakt. Zonder twijfel is het boek hierdoor voor een grotere kring van belangstellenden toegankelijk geworden. Enige honderden figuren verduidelijken den tekst, terwijl aan het einde van beide delen een 12-tal karakteristieken van lampen zijn toegevoegd.

Inleiding tot de radio-ontvangtechniek, voor het technisch onderwijs en voor zelfstudie, door Ir. J. J. H. VRIJDAGHS. 284 blz. 309 fig., ing. *f* 4.50, geb. *f* 5.25. (P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia. 1934).

In tegenstelling met de beide, boven besproken werken, wordt hier gebruik gemaakt van de wiskunde als hulpmiddel. In het voorwoord deelt de schrijver mede, dat hij de lagere wiskunde bekend veronderstelt. „Het gebruik van hogere wiskunde is geheel vermeden om het „boekje voor een bredere lezerskring geschikt te maken," leest men er verder. Jammer! Uit anderer en eigen ervaring is mij bekend dat de leerlingen van de 4de klasse H B.S. 5, niet de minste moeite hebben met de eenvoudigste begrippen en formules van de diff. en integraalrekening. Gehele algebraïsche functies en vormen als $y = a \sin (bx + c)$ kan men zonder bezwaar leren differentieren en integreren. Ook leerlingen van de M.T.S. moeten dit gemakkelijk kunnen verwerken.

Reeds op blz. 1 treft mij bij de behandeling van de harmonische trilling, dat deze veel minder elegant is, dan die, waarbij de differentiaalrekening wordt toegepast. Ook de theorie van de wisselstromen zou veel winnen, bij toepassing van diff.- en integraalrekening. Maar . . in § 51 bij de behandeling van de EMK van zelfinductie wordt de „hogere wiskunde" toch gebruikt. Daar wordt gevonden:

$$\text{EMK v. Z.} = -\text{L.}\frac{di}{dt}\text{ Volts}$$

een formule die nodig maakt het begrip diff. quotient te behandelen,

terwijl in § 70, waar de warmteontwikkeling van een sinusvormige wisselstroom wordt besproken,

$$Q = 0{,}24\ r \Sigma\ i^2 . \Delta t$$

een uitdrukking is, die een uitleg vereist, waaraan nog maar weinig is toe te voegen, om te komen tot

$$Q = 0{,}24\ r\ .\ i^2 \int dt.$$

Daarna wordt overgegaan tot de bepaling van

$$\Sigma\ i^2 . \Delta t = \Sigma\ I^2{}_{max} \sin^2 \omega t\ .\ \Delta t$$

zodat de leerlingen hier kennis maken met het begrip „bepaalde integraal", zij het dan ook zonder dat de naam wordt genoemd.

Afgezien van de principiële kwestie over het al of niet gebruiken van de hogere wiskunde is het boek zeer geslaagd en een prettige leergang voor de a.s. radiotechnicus. De vraagstukken (voorbeelden), waarvan de oplossing geheel in de tekst is opgenomen, zijn met zorg gekozen en zullen juist door hun eenvoud veel tot de verheldering van de begrippen bijdragen. Aan de ruim 300 figuren is veel zorg besteed. De uitvoering van het geheel laat, zoals bij de firma Noordhoff vanzelf spreekt, niets te wensen over.

F. Brouwer.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

K. H. W. VISSER, *Analytische meetkunde, differentiaal- en integraalrekening voor middelbare technische scholen,* 136 blz. 73 fig. . . . . *f* 1,75

C. J. ALDERS, *Algebra voor M.O. en V.H.O.* Deel II. 204 blz. 37 figuren, gecartonneerd . . . . - 2,50

Ir. J. J. H. VRIJDAGHS, *Inleiding tot de Radio-ontvangtechniek.* 284 blz. 309 figuren, ingenaaid *f* 4.50, gebonden - 5,25

R. SWIERSTRA, *Werking, ontwikkeling en toepassing van de radio.* 175 blz. 169 fig., gecartonneerd *f* 2.25, geb. - 2.65

DE ECOLE POLYTECHNIQUE TE PARIJS EN HAAR INVLOED OP DE ONTWIKKELING DER EXACTE WETENSCHAPPEN

DOOR

U. H. VAN WIJK.

In het woelige jaar 1794 werd in Frankrijk een inrichting in het leven geroepen, die al spoedig niet alleen de pépinière is geworden voor leidende technische functies, maar tevens de kweekplaats voor geleerden op het gebied der exacte wetenschappen. Haar naam was binnen enkele jaren reeds in de geheele beschaafde wereld bekend.

Maurice d'Ocagne, die thans aan de school wiskunde doceert, schrijft over de oprichting en het tijdvak van haar grooten bloei: [1])

„La création de l'Ecole Polytechnique en 1794 a marqué dans l'histoire des sciences une date mémorable. Par elle, pour la première fois, se trouvait en effet constitué un enseignement d'ensemble rationnellement ordonné des sciences mathématiques et physiques en vue de leur application subséquente aux techniques les plus diverses. Mais une telle organisation devait, en outre, grandement favoriser le développement de ces sciences elles-mêmes, et tout particulièrement des mathématiques, en stimulant à la fois dans ce sens les efforts des maîtres et des élèves. Telle a été, au surplus, l'opinion d'un homme non moins qualifié que désintéressé dans la question, l'illustre géomètre allemand Felix Klein, qui, en soulignant les magnifiques progrès réalisés par les sciences mathématiques dans les premières décades du XIXe siècle, n'a pas hésité à déclarer [2]) que „tout ce rayonnement scientifique émane de l'Ecole Poly-

---

[1]) „Hommes et choses de sciences" II p. 144—145.
[2]) Dans „Die Naturwissenschaften" (Jan. 1927).

technique et illumine le développement de la pensée en Europe" et que „la plus grande part des traités fondamentaux de mathématiques supérieures du début du XIXe siècle est sortie de l'enseignement de l'Ecole Polytechnique et c'est en quelque sorte de cette source que dérivent tous nos traités actuels."

Aan deze school ontvangen de a.s. ingenieurs, artilleristen en genisten een gemeenschappelijke wetenschappelijke vooropleiding, die twee jaar duurt, betrekkelijk los staat van de latere technische vorming aan verschillende applicatiescholen en alleen door mathematisch zeer begaafden goed te volgen is. Men begint bij de toelating streng te selecteeren; gewoonlijk wordt ± 80 % afgewezen. De animo is echter zoo groot, dat er toch ieder jaar ± 250 jongelui kunnen worden toegelaten. Als vrucht van de revolutie wordt bij de selectie niet meer op afkomst gelet, terwijl deze voor de toelating tot de vroegere scholen te Mézières, Besançon enz. juist de beslissende factor was.

Ter bereiking van het doel der oprichters om van de school te maken „un centre de haute culture scientifique", werden vanaf het begin de grootste geleerden met het onderwijs belast. Lagrange, Laplace, Fourier en Monge behoorden tot de eerste docenten. „Les organisateurs et les conseils de l'Ecole ont toujours pensé que l'admiration pour le maître est un stimulant puissant d'éducation; ils ont toujours cherché à mettre en présence des élèves les grands inventeurs scientifiques et, à leur défaut, ceux qui s'en approchaient le plus." [1])

Het is te begrijpen, dat dergelijke docenten zich niet strikt aan een voorgeschreven programma hielden, doch de colleges naar hun persoonlijken smaak inrichtten. Zij lieten zich niet leiden door hetgeen de techniek eischt, doch hielden hun onderwijs op zuiver wetenschappelijk peil. Het is trouwens heel moeilijk te omlijnen, welke wetenschappelijke problemen wel en welke geen toepassing in de techniek vinden of zullen vinden.

Doch het is evenzeer logisch, dat van tijd tot tijd de vrees is uitgesproken, dat het onderwijs voor de a.s. technici in te verheven banen zou worden geleid. „Dans tous les cas, les conseils de 1812 répondaient nettement déjà à ceux qui, périodiquement, expriment

---

[1]) Deze en volgende aanhalingen, waarbij niet speciaal de bron vermeld wordt, zijn alle ontleend aan: „L'Ecole Polytechnique. Livre du Centenaire 1794—1894" en „L'Ecole Polytechnique" (1932).

la crainte de voir l'enseignement de l'Ecole s'engager dans des spéculations trop élevées, „on doit considérer les études de l'Ecole Polytechnique comme ayant principalement pour objet d'exercer l'esprit et la sagacité des élèves, et de les rendre capables de saisir toutes applications dont ils pourront être chargés un jour."

Het kan ook geen verwondering baren, dat men bij een dergelijke opvatting van het onderwijs zich niet angstvallig aan de voorgeschreven eischen voor toelating heeft gehouden, doch meer op wetenschappelijken aanleg in 't algemeen heeft gelet. Zoo werd Poinsot (1777—1859) in 1794, zij 't met het laagste rangnummer, toegelaten zonder de geringste kennis van de algebra te bezitten. De examinatoren namen genoegen met de verklaring van den zelfbewusten, meetkundig uitstekend onderlegden, zeventienjarigen, dat hij zich de beginselen van dat vak wel eigen zou maken.

Poisson (1781—1840), die in 1798 als no. 1 tot de school werd toegelaten, bleek niet te kunnen teekenen. Maar in die roemrijke dagen van het instituut werd ter wille van de wetenschap een uitzondering gemaakt en Poisson vrijgesteld van 't maken van de vereischte teekeningen. Doch niet alleen de leiding der school, maar ook Poissons kameraden droegen het hunne er toe bij om den begaafden jongen man te doen slagen. Zij sprongen den zoon van een soldaat uit den zevenjarigen oorlog financieel bij om hem het verblijf op de school mogelijk te maken.

Men heeft bij de toelating natuurlijk ook wel eens misgegrepen. Zoo werd in 1828 en in 1829 de geniale Galois (1811—1832) afgewezen. Als reden geeft hij zelf op, dat de vragen, welke hem gesteld werden, te kinderachtig waren, zoodat 't hem niet mogelijk was geweest, er op te antwoorden. De arrogantie van den onevenwichtigen jongen man zal dus wel de reden van zijn afwijzing geweest zijn.

Merkwaardig is de scherpe woordenwisseling, welke zich bij de toelating van Arago (1786—1853) in 1803 heeft voorgedaan en die uitvoerig beschreven is in „Mathematiker-Anekdoten" van W. Ahrens (blz. 29—33). De methode van ondervraging van den examinator Louis Monge (1748—1827) zal wel niet de goedkeuring kunnen wegdragen van moderne paedagogen. Alleen candidaten van het gehalte van Arago, die de stof tot in de finesses beheerschen, behoeven zich er niets van aan te trekken, wanneer de examinator zijn vragen op onaangename wijze stelt en kunnen zich de weelde